

Exercice 1 (5 points)

Suite à un contrôle de routine à l'alcootest effectué sur 50 conducteurs durant lequel 6 ont été testés positifs, les données ont été inscrites sur des fiches cartonnées identiques et individuelles. Puis, elles ont été stockées dans un tiroir.

1) On tire au hasard et simultanément 3 fiches parmi les 50 fiches.

- a) Calculer le nombre de choix possibles. $0,25 + 0,25$
b) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

- ◀ A : « les 3 fiches choisies indiquent que les conducteurs sont contrôlés positifs » ; $0,15$
B : « 2 des 3 fiches choisies indiquent que les conducteurs sont contrôlés positifs » ; $0,15$
C : « au moins 1 des 3 fiches choisies indiquent que le conducteur est contrôlé positif » ; $0,11$

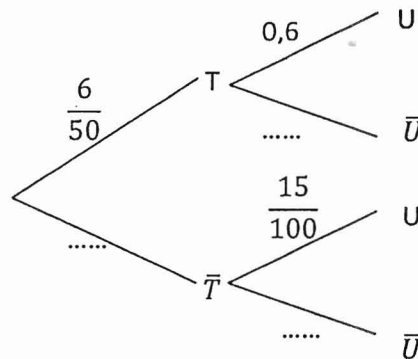
2) On choisit maintenant 1 des 50 conducteurs.

Il est prouvé que pour un conducteur testé négatif la probabilité qu'il fasse un accident est de 15% et lorsqu'il est testé positif, la probabilité qu'il fasse un accident est 60%.

On définit les évènements suivants :

- T : « le conducteur est testé positif » ;
U : « le conducteur fait un accident » .

a) Reproduire puis compléter l'arbre pondéré suivant :



b) Déterminer la probabilité qu'un de ces conducteurs soit testé positif et fasse un accident. $0,11$

c) Vérifier que la probabilité qu'un conducteur fasse un accident est $p = \frac{51}{250} = 0,204$. $0,11$

3) On suit 3 de ces conducteurs contrôlés choisis au hasard et de façon indépendante. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de conducteurs qui font un accident parmi les 3 conducteurs suivis.

- a) Donner l'ensemble des valeurs possibles de X. $0,11$
b) Etablir la loi de probabilité de X. $0,15$
c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. $0,11$

Exercice 2 (5 points)

Une étude statistique d'un magasin a révélé que chaque année il garde 75% de ses clients de l'année précédente aux quels s'ajoutent 800 nouveaux clients.

Ce magasin a eu 1600 clients en 2007.

- 1) Démontrer que ce magasin devra avoir 2000 clients en 2008. 0,15
- 2) Quel sera le nombre de clients du magasin en 2009 ? 0,15
- 3) On note u_n le nombre de clients de ce magasin en $(2007 + n)$, pour tout entier n . On donne $u_0 = 1600$. Démontrer que : $u_{n+1} = 0,75u_n + 800$. 0,15
- 4) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 3200 - u_n$; $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculer v_0 . 0,15
 - b) Démontrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 0,75v_n$. 0,75
 - c) En déduire la nature de la suite (v_n) en précisant la raison et le premier terme. 0,175
 - d) Exprimer v_n en fonction de n . 0,15
 - e) Vérifier que $u_n = 3200 - (0,75)^n \times 1600$. 0,15
 - f) Calculer le nombre de clients de ce magasin en 2017. (On donnera la valeur arrondie à l'unité près). 0,15

Problème (10 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

- 1) a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. 0,15+0,15
 - b) Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g . 0,15
 - c) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. 0,15
 - d) Dresser son tableau complet de variation. 0,15
- 2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$ et que $1,31 < \alpha < 1,32$. 0,15
- 3) En déduire que g est négative sur $]0; \alpha[$ et positive sur $]\alpha; +\infty[$. 0,15

Partie B : Etude d'une fonction.

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1-\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f .

Exercice 1

(1)

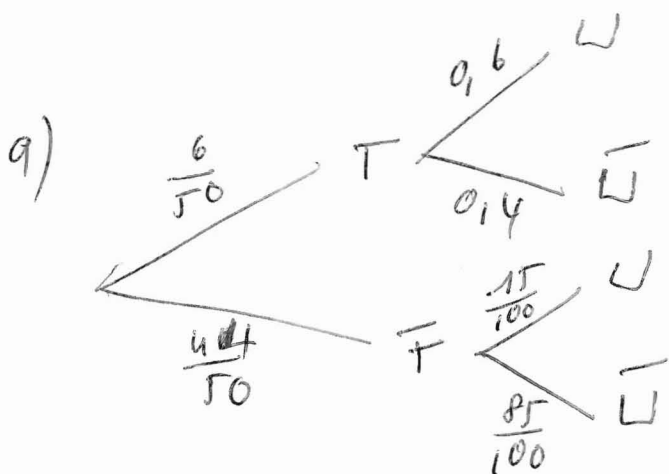
1° a) Le nombre de choix possibles est $C_{50}^3 = \frac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2 \times 1} = 19600$

b) $P(A) = \frac{C_6^3}{C_{50}^3} = \frac{20}{19600} = \frac{1}{980}$

$P(B) = \frac{C_6^2 \times C_{44}^1}{C_{50}^3} = \frac{660}{19600} = \frac{33}{980}$

$P(C) = 1 - \frac{C_{44}^3}{C_{50}^3} = \frac{227}{980}$

2°



b) $P(T \cap U) = \frac{6}{50} \times 0,6 = 0,072$

c) $P(U) = \frac{6}{50} \times 0,6 + \frac{44}{50} \times \frac{15}{100}$

$P(U) = \frac{0,36}{50} + \frac{44 \times 0,15}{50} = 0,204$

x_i	0	1	2	3
P_i	0,504358	0,387773	0,099379	0,00849

a) $X(\omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

b) X suit la loi binomiale de parametre $n = 3$

$p = 0,204 \quad q = 1 - 0,204 = 0,796$

$P(X=k) = C_3^k (0,204)^k (0,796)^{3-k}$

c) $E(X) = np = 3 \times 0,204$

$E(X) = 0,612 = \frac{153}{250}$

Exercice 2

1) $\frac{1600 \times 75}{100} + 800 = 2000$ di

2° $\frac{75 \times 2000}{100} + 800 = 2300$ di

3° $u_0 = 1600$

$u_{n+1} = u_n \times \frac{75}{100} + 800$

$u_{n+1} = 0,75 u_n + 800$

4° $v_n = 3200 - u_n$

a) $v_0 = 3200 - u_0 = 1600$

b) $v_{n+1} = 3200 - u_{n+1}$

$= 3200 - (0,75 u_n + 800)$

$= 2400 - 0,75 u_n =$

$= 0,75 \left(\frac{2400}{0,75} - u_n \right)$

$= 0,75 (3200 - u_n) = 0,75 v_n$

donc $v_{n+1} = 0,75 v_n$

c) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,77$ et de premier terme $v_0 = 1600$.

d) $v_n = 1600 (0,77)^n$

e) $u_n = 3200 - v_n$

$u_n = 3200 - (0,77)^n \times 1600$

f) en 2017 on a $n = 10$ et

$u_{10} = 3200 - (0,77)^{10} (1600)$

$u_{10} \approx 3110$ clients

en 2017 on a : 3110 clients.

Problème

A

$g(x) = x^2 - 2 + \ln x \quad x > 0$

1° $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ OUI

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$

② b) g est dérivable sur $]0; +\infty[$

et $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$

c) $g'(x) > 0$ et g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

d) x	0	?	$+\infty$
$g(x)$		+	
$g(x)$		0	$+\infty$

2° g est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc

g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur \mathbb{R} or $0 \in \mathbb{R}$ donc

l'éq $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$.

De plus $g(1,31) \approx -0,014 < 0$

$g(1,32) \approx 0,027 > 0$

et $1,31 < \alpha < 1,32$

3° g est croissant et $g(x) = 0$ donc sur $]0; \alpha[$ $g < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$ $g > 0$

Partie B

(3)

1° a) $f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$
 $x + \frac{1}{x}(1 - \ln x) = x + \frac{x - \ln x}{x}$ donc
 $f(x) = x + \frac{1}{x}(1 - \ln x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et
 $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \ln x = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

c) La droite d'équation $x = 0$ est A.V.A.(C).

2° a) $f(x) = x + \frac{1 - \ln x}{x}$
 $f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ car

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

c) $f(x) - y = \frac{1 - \ln x}{x}$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0$

donc (A) $y = x$ est A.B.

d) $f(x) - y = \frac{1 - \ln x}{x}$

$1 - \ln x > 0 \quad -\ln x > -1$
 $\ln x \leq 1 \quad x \leq e$

	0	e	$+\infty$
$1 - \ln x$		+	-

sur $]0, e[$ (C) au dessus de (A)

sur $]e, +\infty[$ (C) au dessous au point A(e)(C) tang(A).

3) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x^2}$

b) or $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$ donc

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

f est de signe de g donc

sur $]0, x[$ $f' < 0$

sur $]x, +\infty[$ $f' > 0$

c) sur $]0, x[$ f est decr.

sur $]x, +\infty[$ f est crois

Tableau de variat

	0	x	$+\infty$
f'		-	+
f	$+\infty$		

→ $f(x)$ → $+\infty$

$$a) (+) y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

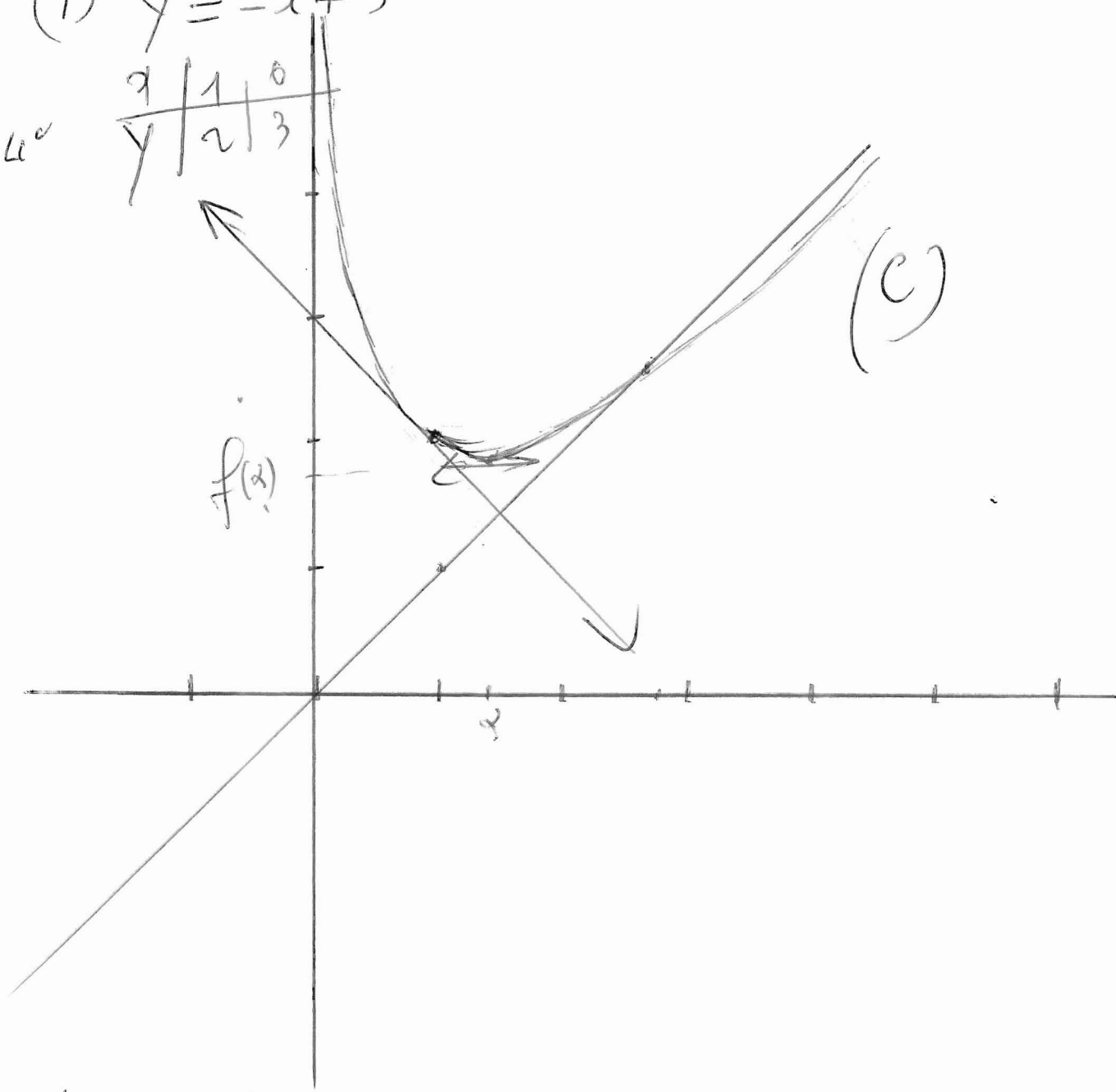
(4)

$$(+) y = -(x-1) + 2$$

$$(T) y = -x + 3$$

4°

x	1	0
y	2	3



$$\alpha \approx 1,37$$
$$f(\alpha) \approx 1,96$$

Exercice 2 (5 points)

Une étude statistique d'un magasin a révélé que chaque année il garde 75% de ses clients de l'année précédente aux quels s'ajoutent 800 nouveaux clients.

Ce magasin a eu 1600 clients en 2007.

- 1) Démontrer que ce magasin devra avoir 2000 clients en 2008. 0,15
- 2) Quel sera le nombre de clients du magasin en 2009 ? 0,15
- 3) On note u_n le nombre de clients de ce magasin en $(2007 + n)$, pour tout entier n . On donne $u_0 = 1600$. Démontrer que : $u_{n+1} = 0,75u_n + 800$. 0,15
- 4) Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = 3200 - u_n$; $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Calculer v_0 . 0,15
 - b) Démontrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = 0,75v_n$. 0,75
 - c) En déduire la nature de la suite (v_n) en précisant la raison et le premier terme. 0,75
 - d) Exprimer v_n en fonction de n . 0,15
 - e) Vérifier que $u_n = 3200 - (0,75)^n \times 1600$. 0,15
 - f) Calculer le nombre de clients de ce magasin en 2017. (On donnera la valeur arrondie à l'unité près). 0,15

Problème (10 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

- 1) a) Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. 0,15+0,15
 - b) Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g . 0,15
 - c) Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. 0,15
 - d) Dresser son tableau complet de variation. 0,15
- 2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0; +\infty[$ et que $1,31 < \alpha < 1,32$. 0,15
- 3) En déduire que g est négative sur $]0; \alpha[$ et positive sur $]\alpha; +\infty[$. 0,15

Partie B : Etude d'une fonction.

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1-\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f .