MINISTERE DE L'EDUCATION *NATIONALE*

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO

Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE

UNION – TRAVAIL – JUSTICE

BAC BLANC n° 1 Avril 2009

Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : A1

Durée : 3H

Coeff : 04

EXERCICE 1 (5 points)

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$.

1°) a) Calculer P(-1) puis écrire P(x) sous la forme $P(x) = (x+1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme que l'on déterminera

b) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$ puis l'inéquation $P(x) \geq 0$.

2°) En déduire les solutions des équations et inéquation suivantes :

a) $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$;

b) $\ln(2x^2 - x - 3) + \ln(x-1) = \ln(x+1)$;

c) $2\ln x + \ln(2x-3) \geq \ln(3x-2)$.

3°) Résoudre dans IR^2 le système suivant :

$$\begin{cases} \ln x + 2\ln 5 = \ln 12 - \ln y \\ x + y = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

EXERCICE 2 (5 points)

Un jury de cour d'assises est composé de 8 jurés désignés par tirage au sort dans une liste de 40 noms . Cette liste est composée de 22 femmes et 18 hommes .

1°) a) Combien de jurys différents peut-on former à partir de cette liste ?

b) Combien de jurys sont composés uniquement de femmes ?

c) Combien de jurys sont composés de 5 femmes et de 3 hommes ?

d) Combien de jurys sont composés d'un nombre égal d'hommes et de femmes ?

2°) Michel et Catherine sont sur la liste des 40 personnes .

a) Combien y a-t-il de jurys comportant Michel ?

b) Combien y a-t-il de jurys comportant Catherine ?

c) Combien y a-t-il de jurys comportant Michel et Catherine ?

d) Combien y a-t-il de jurys comportant Michel ou Catherine ?

PROBLEME (10 points)

PARTIE A : *Etude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I= $]0;+\infty[$ par g(x) = $\frac{1}{2}x^2+1-\ln x$.

1°) a) Calculer g'(x) et donner le sens de variation de g sur I .

b) Dresser le tableau de variation de g (les limites ne sont pas demandées) .

2°) En déduire le signe de g(x) sur I

PARTIE B : *Etude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I= $]0;+\infty[$ par f(x) = $3-x-2\frac{\ln x}{x}$; on note *(C)* la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan ayant pour unités graphiques : 4 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées .

1°) a) Etudier la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b) Etudier la limite de f en + ∞ .

c) Calculer f'(x) et montrer que pour tout x de I , f'(x) = $\frac{-2g(x)}{x^2}$.

En déduire les variations de f sur I puis dresser son tableau de variation .

2°) a) Montrer que la droite (D) d'équation y = - x+3 est asymptote à la courbe (C) .

b) Calculer les coordonnées du point d'intersection de (C) et de (D) .

c) Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) .

3°) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b) Démontrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse x_0 de l'intervalle $]1;2[$.

c) Donner un encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

4°) Tracer avec soin (T), (D) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

PARTIE C

Soit H la fonction définie sur l'intervalle I par H(x) = $(\ln x)^2$.

1°) Calculer H'(x) .

2°) En déduire la primitive F de f , qui prend la valeur $-\frac{1}{2}$ en 1.

3°) Calculer F(e^2) - F(e) .

Serie A_1 I

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

1°a) $P(-1) = 0$

$P(x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$

$P(x) = (x+1)(x-2)(2x-1)$

b) $P(x) = 0$ $S = \{-1; \frac{1}{2}; 2\}$

$S = [-1; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$

2°) a) $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

$D =]0; +\infty[$

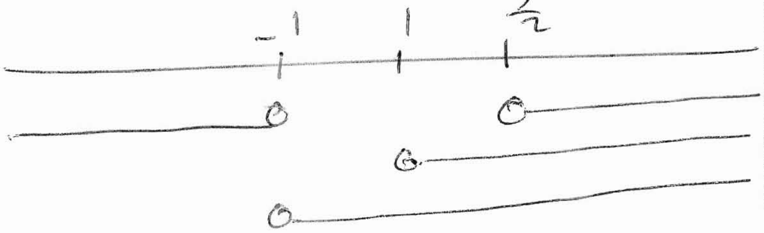
$S = \{e^{-1}; e^{\frac{1}{2}}; e^2\}$

b) $\ln(2x^2 - x - 3) + \ln(x-1) = \ln(x+1)$

$2x^2 - x - 3 > 0$ $x - 1 > 0$ $x + 1 > 0$

$(x+1)(2x-3)$ $x > 1$ $x > -1$

$]-\infty; -1[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$



$D' =]\frac{3}{2}; +\infty[$.

$\ln(2x^2 - x - 3) + \ln(x-1) = \ln(x+1)$

$\ln(2x^2 - x - 3)(x-1) = \ln(x+1)$

$(2x^2 - x - 3)(x-1) = x+1$

$2x^3 - 2x^2 - x^2 + x - 3x + 3 - x - 1 = 0$

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = -1 \notin D'$ $x = \frac{1}{2} \notin D'$ ou $x = 2 \in D'$

$\boxed{S = \{2\}}$

c) $2\ln x + \ln(2x-3) \geq \ln(3x-2)$

$x > 0$ $x > \frac{3}{2}$ $x > \frac{2}{3}$

$D'' =]\frac{3}{2}; +\infty[$.

$\ln x^2 + \ln(2x-3) \geq \ln(3x-2)$

$\ln x^2(2x-3) \geq \ln(3x-2)$

$x^2(2x-3) \geq 3x-2$

$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$(x+1)(x-2)(2x-1) \geq 0$

x		-1		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
P	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\boxed{S = [2; +\infty[}$

3°) $\begin{cases} \ln x + 2\ln 5 = \ln 12 - \ln y \\ x + y = \frac{7}{5} \end{cases}$ $\boxed{x > 0 \text{ et } y > 0}$

$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 12 - 2\ln 5 \\ x + y = \frac{7}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = \frac{7}{5} \\ xy = \frac{12}{25} \end{cases}$

$\begin{cases} \ln xy = \ln \frac{12}{25} \end{cases}$

$t^2 - \frac{7}{5}t + \frac{12}{25} = 0$

$25t^2 - 35t + 12 = 0$

$(5t-3)(5t-4) = 0$

$t = \frac{3}{5}$ ou $t = \frac{4}{5}$

$S = \{(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}); (\frac{4}{5}; \frac{3}{5})\}$.

II

1a) $C_{40}^{8} = 76904685$

b) $C_{22}^{8} = 319770$

c) $C_{22}^{5} \times C_{18}^{3} = 21488544$

d) $C_{22}^{4} \times C_{18}^{4} = 22383900$

2° a) $C_{39}^{7} \times C_{1}^{1} = 15380937$

b) $C_{39}^{7} \times C_{1}^{1} = 15380937$

c) $C_{38}^{6} \times C_{2}^{2} = 2760681$

d) $C_{39}^{7} + C_{39}^{7} \cdot C_{38}^{6} = 28001193$

PROBLEME

A $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x$

1°a) g est derivable sur $]0;+\infty[$

$g'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$

x	0		1		$+\infty$
	||	$-$	0	$+$	

sur $]0;1]$ g est décroissante sur $[1;+\infty[$ g est croissante

b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$ $\lim\limits_{+\infty} x\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
g'	||	$-$	0	$+$	
g	|| $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

2°) $\frac{3}{2}$ est le minimum de g sur I

or $\frac{3}{2} > 0$ donc $g > 0$.

B

$f(x) = 3 - x - 2\frac{\ln x}{x}$

1°a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{0} 3 - x = 3$

et $\lim\limits_{0} -\frac{2\ln x}{x} = +\infty$

la droite $x = 0$ est A.V.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

c) f est derivable sur I et

$f'(x) = -1 - 2\frac{1-\ln x}{x^2}$

$= \frac{-x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2}$

$= \frac{-2\left(\frac{x^2}{2} + 1 - \ln x\right)}{x^2} = \frac{-2g(x)}{x^2}$

$x^2 > 0$ donc f' est de signe de $-g$

or $g(x) > 0 \Rightarrow -g(x) < 0$ donc

$f' < 0$ et f est str $\searrow$.

Tableau de Variation

x	0		$+\infty$
f'	||	$-$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2° a) $f(x) - y = -2\frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) - y = \lim\limits_{+\infty} -2\frac{\ln x}{x} = 0$ donc

(Δ) $y = -x + 3$ est AS à (C)

b) $f(x) = y \Leftrightarrow x = 1$ et

$(C) \cap (D) = (1;2)$

c)

x	0		1	
$f(x) - y$	||	$+$	0	$-$

sur $]0;1]$ ... (C) au dessus de (D) ... (C) au dessous

3°a) (T) $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

(T) $y = -3(x-1) + 2 = -3x + 5$

b) f est deri et st decr sur $]0;+\infty[$ donc f real 1 bij de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$

$0 \in \mathbb{R}$ donc l'eq $f(x) = 0$

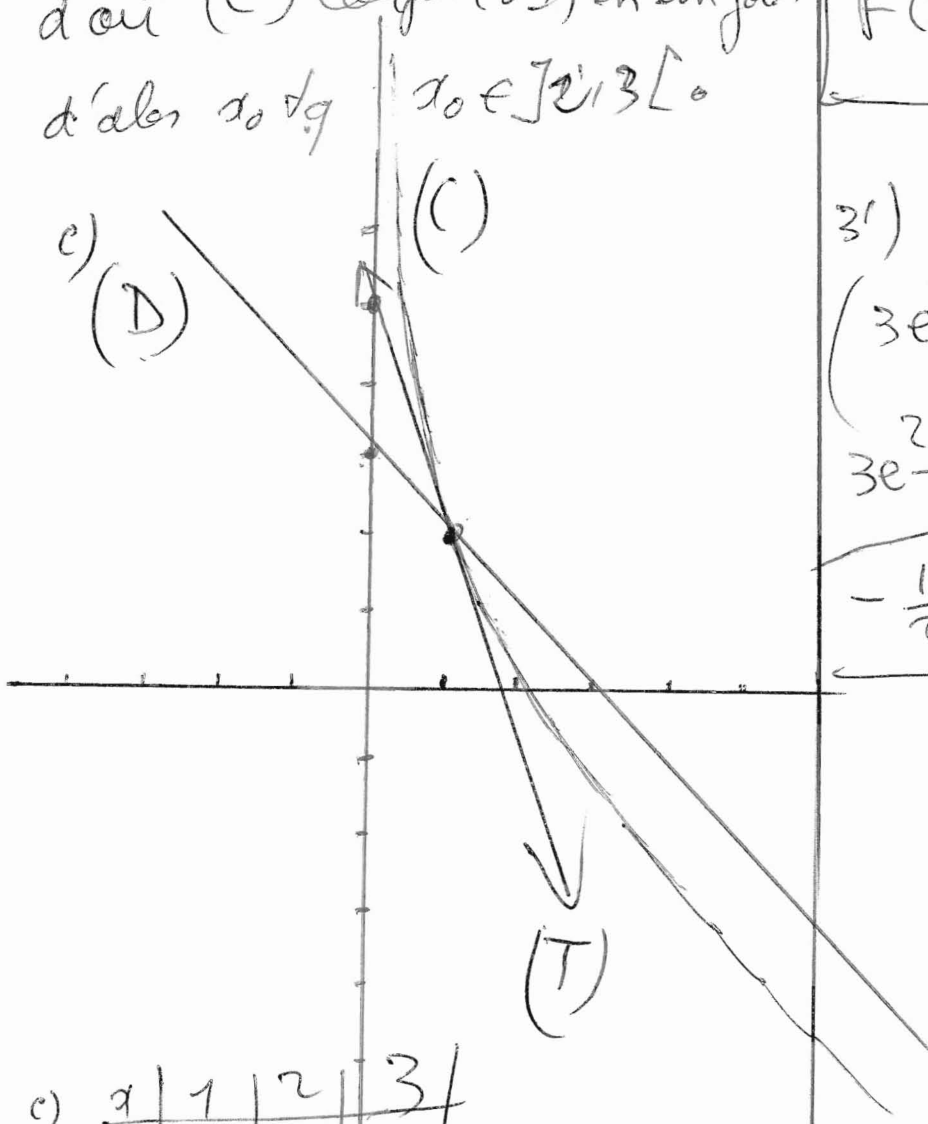
admet 1 seule solut°, de plus

$f(2) \times f(3) < 0$ ainsi $x_0 \in]1;2]$

d'où (C) coupe (OI) en un point

d'abs x_0 t/q $x_0 \in]2;3[$.

c)



c)

x	1	2	3
$f(x)$	2	0,3	-0,7

2,2	2,3
0,08	-0,02

x	2,27	2,28
$f(x)$	0,007	-0,003

$2{,}27 < x_0 < 2{,}28$

(3)

(C)

1) $H(x) = (\ln x)^2$

$H'(x) = \frac{2}{x} \ln x$.

2° $F(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 - (\ln x)^2 + k$

$F(1) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2} + k = 0$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{5}{2}$

$\boxed{F(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 - (\ln x)^2 - \frac{5}{2}}$

3) $F(e^2) - F(e) =$

$\left(3e^2 - \frac{1}{2}e^4 - 4 - \frac{5}{2}\right) - \left(3e - \frac{1}{2}e^2 - 1 - \frac{5}{2}\right)$

$3e^2 - \frac{1}{2}e^4 - 4 - 3e + \frac{1}{2}e^2 + 1$

$\boxed{-\frac{1}{2}e^4 + \frac{7}{2}e^2 - 3e - 3}$