MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
Direction d'Académie Provinciale Ogooué - Maritime
Service des Examens et Concours
LYCEE JOSEPH AMBOUROUET-AVARO
DE PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
Union – Travail – Justice

BACCALAUREAT BLANC n° 1
Session de : Mars 2012

EPREUVE DE : MATHEMATIQUES
Série : A1
Durée : 3 heures
Coef : 4

EXERCICE 1 (5 points)

1°) On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.
  a) Calculer P(2) et en déduire une factorisation de P.
  b) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$;
  c) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) En déduire les solutions dans IR de :
  a) $2\ln x + \ln(x - 1) = \ln(14x - 24)$;
  b) $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 14\ln x + 24 = 0$;
  c) $\ln x + \ln(x^2 - 16) < \ln(x^2 - 2x - 24)$;
  d) $\ln(x^3 - x^2) \geq \ln(7x - 12) + \ln 2$.

EXERCICE 2 (5 points)

Le tableau suivant donne le chiffre d'affaires d'une entreprise depuis 2003

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires y_i en millions de francs	16	19	22	23	24	26	27	30

1°) a) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double dans un repère orthogonal (O, I, J).
  Unités graphiques : 1cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
  1cm pour 2 millions sur l'axe des ordonnées.
  On prendre pour origine le point (0 ; 15)
  b) Que suggère la forme de ce nuage ?
  c) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer le point G.

2°) a) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
  b) Un ajustement affine est-il possible ? Justifier votre réponse.

3°) a) Par la méthode des moindres carrés, donner une équation de la droite de régression (D) de y en x.
  b) Tracer cette droite.

4°) On suppose que cette tendance se poursuit.
  a) Quel chiffre d'affaires peut-on prévoir en 2013 ?
  b) A partir de quelle année le chiffre d'affaires de l'entreprise dépassera-t-il les 45 millions de francs ?

PROBLEME **(10 points)**

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x^2+1-\ln x$.

1°) Calculer les limites de g en 0 et $+\infty$.

2°) a) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

b) En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}$.

On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1°) a) Calculer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$.

d) Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D). On précisera les coordonnées du point A, intersection de $(\mathscr{C})$ et (D)

2°) a) Calculer la fonction dérivée f' de f et vérifier que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f puis dresser le tableau de variation de f.

3°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$ et que $0{,}55<\alpha<0{,}56$.

4°) a) Calculer la fonction dérivée h' de h définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=(\ln x)^2$.

b) En déduire la primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$ qui s'annule en 1.

5°) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1.

b) Construire avec soin la courbe $(\mathscr{C})$, les droites (D) et (T).

$f(x)=x+\frac{1}{2}+\frac{\ln x}{x}$

Bac Blanc Maths Serie A1 Mars 2012

I

1° $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

a) $P(2) = 0$

$P(x) = (x-2)(x^2+x-12)$

Rq $P(x) = (x-2)(x+4)(x-3)$.

b) $P(x) = 0$ $S = \{-4; 2; 3\}$.

c)

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+x-12		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

sur $]-\infty; -4[\cup]2; 3[$ $P < 0$

sur $]-4; 2[\cup]3; +\infty[$ $P > 0$

sur $\{-4; 2; 3\}$ $P = 0$

2° a) $2\ln x + \ln(x-1) = \ln 14x-24$

$x > 0$ $x > 1$ et $x > \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$

$V_1 =]\frac{12}{7}; +\infty[$.

$x \in V_1$ $\ln x^2(x-1) = \ln 14x-24$

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

$x = -4 \notin V$ $x \in 2 \in V$ $x = 3 \in V$

$\boxed{S = \{2; 3\}}$

b) $V_2 =]0; +\infty[$

$X = \ln x$.

$X^3 - X^2 - 14X + 24 = 0$

$X \in \{-4; 2; 3\}$ $x \in \{e^{-4}; e^2; e^3\}$

$\boxed{S = \{e^{-4}; e^2; e^3\}}$

c) $\ln x + \ln(x^2-16) < \ln(x^2-2x-24)$

x		-4		0		4		6	
x	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
x^2-16	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x^2-2x-24$	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$

$\boxed{V_3 =]6; +\infty[}$

$\ln x(x^2-16) < \ln(x^2-2x-24)$

$x(x^2-16) < x^2 - 2x - 24$

$x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$

$x \in (]-\infty; -4[\cup]2; 3[) \cap V_3$

$S = \emptyset$

d) $x^2(x-1) > 0$ et $x > \frac{12}{7}$

$x > 1$ et $x > \frac{12}{7}$

$V_4 =]\frac{12}{7}; +\infty[$.

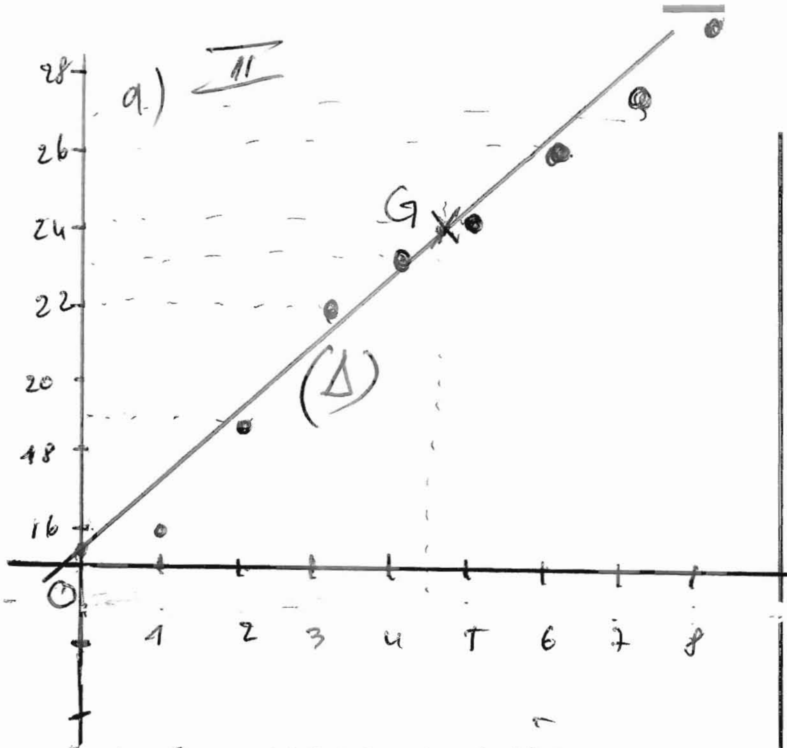
$\ln(x^3 - x^2) \geq \ln(14x - 24)$

$x^3 - x^2 - 14x + 24 \geq 0$

$x \in ([-4; 2] \cup [3; +\infty[) \cap V_4$

$\boxed{S =]\frac{12}{7}; 2] \cup [3; +\infty[}$.

a) II



b) Ce nuage suggère un ajustement Linéaire car les points semble alignés.

									Tot	
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	36	T_1
y_i	16	19	22	23	24	26	27	30	187	T_2
x_i^2	1	4	9	16	25	36	49	64	204	T_3
y_i^2	256	361	484	529	576	676	729	900	4511	T_4
x_iy_i	16	38	66	92	120	156	189	240	917	T_5

c) $\bar{x} = \frac{T_1}{8} = \frac{36}{8} = 4,5$ $G\begin{pmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{pmatrix}$

$\bar{y} = \frac{T_2}{8} = \frac{187}{8} = 23,375$

donc $\boxed{G(4,5 ; 23,375)}$

2° a) $Cov(X,Y) = \frac{T_5}{8} - \bar{x}\bar{y} = 9,4375$

$V(X) = \frac{T_3}{8} - \bar{x}^2 = 5,25$

$V(Y) = \frac{T_4}{8} - \bar{y}^2 = 17,484375$

$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \simeq 0,985$

b) $0,87 < |r| < 1$ donc il existe une très forte corrélation entre x et y, ainsi l'ajustement affine est justifiée.

3° a) $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \simeq 1,8$

$b \simeq \bar{y} - a\bar{x} = 15,275$

(D) $\boxed{y = 1,8x + 15,275}$

b) Voir figure

4° a) en 2013 on a $x = 11$

$y \simeq 35,075$

en 2013 le chiffre d'affaire serait environ 35,075 million

b) $y \geq 45 \Rightarrow$

$1,8x + 15,275 \geq 45$

$x \geq 16,51$

on peut prendre $x = 17$ et

c'est à partir de 2019 que le chiffre d'affaire depassera 45 million de f.

2

Problème

$x > 0$

A $g(x) = x^2 \cancel{+x} - \ln x$

1° $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \cancel{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} -\ln x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$

$= +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$

2° a) g est dérivable sur $]0; +\infty[$

et $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

$g'(x) = \frac{x\sqrt{2} + 1}{x}(x\sqrt{2} - 1)$

$x > 0$ $x\sqrt{2} + 1 > 0$ et $g'(x)$ est de

Signe de $x\sqrt{2} - 1$

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$ g est décroissante

sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ g est croissant

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3 + \ln 2}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3 + \ln 2}{2} \simeq 1,846$

b) $\frac{3 + \ln 2}{2} > 0$ minimum de g sur $]0; +\infty[$ donc $g > 0$.

B $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$

1° a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = \\ \lim\limits_{0} \frac{1}{x} \times \ln x = -\infty \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

c) $f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc (D) $y = x + \frac{1}{2}$ est une asy. à (C).

d)

	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$	‖	$-$	0	$+$	

sur $]0; 1[$ (C) au dessous de (D)

sur $]1; +\infty[$ (C) au dessus de (D)

au point d'abscisse 1 (C) coupe (D) et le point A

est $\boxed{A\left(1; \frac{3}{2}\right)}$

3

2°) a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$

et $f'(x) = 1 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$

or $g(x) = x^2+1-\ln x$ donc

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$ car $g(x) > 0$

b) $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

3°) f est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

donc f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$.

de plus $f(0{,}55) \simeq \quad < 0$

$f(0{,}56) \simeq \quad > 0$

$f(0{,}55) \times f(0{,}56) < 0$

d'où $0{,}55 < \alpha < 0{,}56$.

4°) a) $h(x) = (\ln x)^2$ et $h'(x) = 2\frac{\ln x}{x}$

b) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$

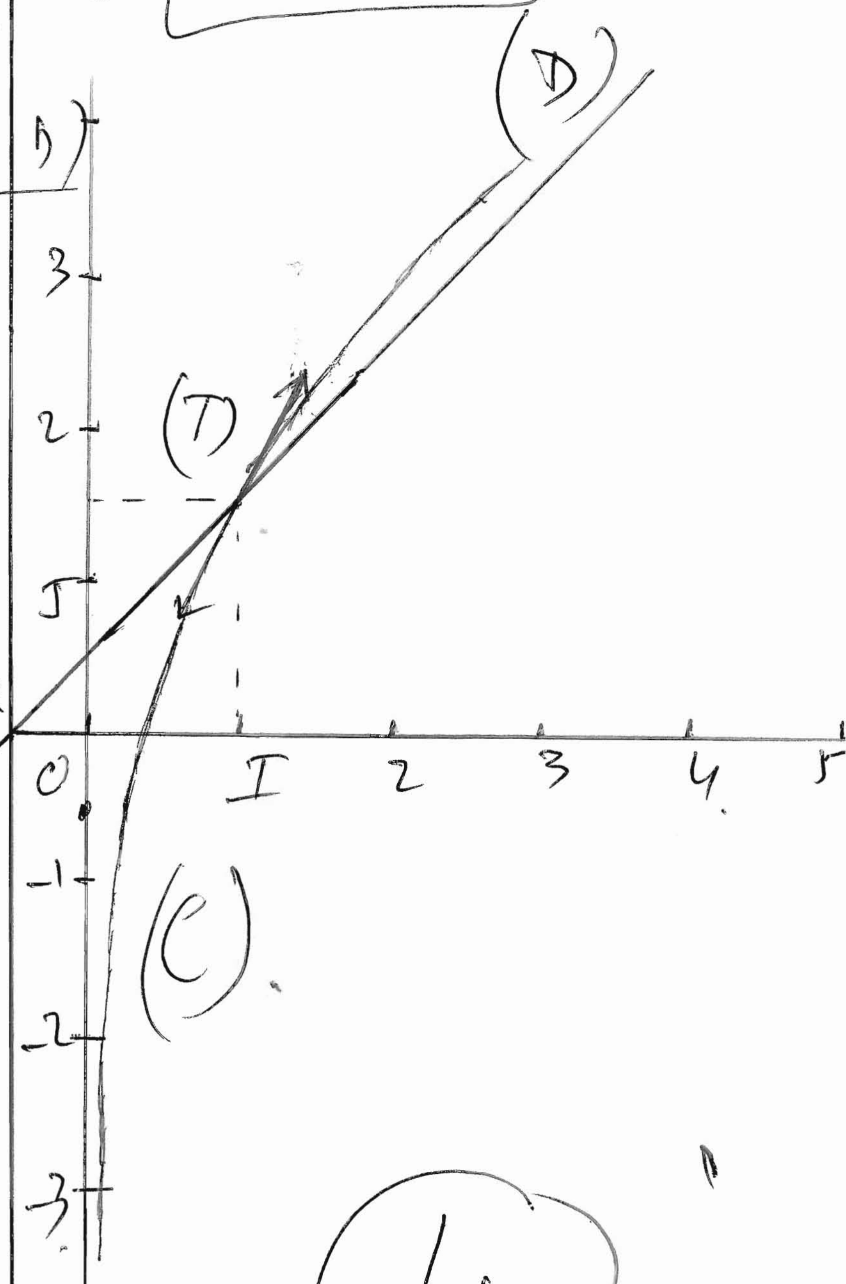
$F(1) = 0 \Leftrightarrow k = -1$ et

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 1$

5°) a) (T) $y = 2(x-1) + \frac{3}{2}$

(T) $\boxed{y = 2x - \frac{1}{2}}$

b)



4