MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

LYCEE Joseph AMBOUROUE-AVARO

Tél : 55 21 73 FAX : 55 12 02 BP : 236 PORT-GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION – TRAVAIL – JUSTICE

BAC BLANC n° 1 Avril 2009
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : B
Durée : 3h
Coeff : 3

EXERCICE 1 (~~4~~ 5 points)

1. On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.
   1.1 Calculer $P(-1)$. 0,25
   1.2 En déduire une factorisation de $P(x)$ puis résoudre dans IR, l'équation $P(x) = 0$. 0,5+0,5

2. En déduire la résolution dans IR de :
   2.1 $\ln x + \ln(2x + 1) = \ln 6$; 0,25+0,5
   2.2 $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 5 = \dfrac{6}{\ln x}$; 0,5 +0,5
   2.3 $\ln x^2 + \ln(2x + 3) \leq \ln(5x + 6)$; 0,25 +0,75
   2.4 $2\ln x + 1 \geq \dfrac{6}{\ln x}$. 0,25 +0,75

EXERCICE 2 (4 points)

Dans un sac il y a : trois boules rouges numérotées 1, 2, 3 ; quatre boules vertes numérotées 4, 5, 6, 7 ; deux boules blanches numérotées 8, 9.
Toutes ces boules sont indiscernables au toucher.

1. On prend successivement trois boules du sac qu'on pose côte à côte sur une table.
   0,75 1.1 Combien de résultats différents possibles peut-on avoir ?
   0,5 1.2 Quel est le nombre de possibilités où les trois boules portent des chiffres impairs ?
   0,5 1.3 Combien y a-t-il de possibilités d'avoir trois boules de même couleur ?

2. On prend simultanément trois boules du sac.
   0,75 2.1 Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?
   0,5 2.2 Quel est le nombre de possibilités d'avoir une boule de chaque couleur ?
   0,5 2.3 Quel est le nombre de possibilités d'avoir une boule blanche ?
   0,5 2.4 Combien y a-t-il de possibilités d'avoir deux boules portant des chiffres pairs ?

PROBLEME (12 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

1. 1.1 Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$. 0,5 + 0,25 + 0,25

 1.2 Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0 ; +\infty[$ et que $1,31 < \alpha < 1,32$.

3. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. 0,5

Partie B : Etude d'une fonction et détermination de primitive

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \dfrac{1 - \ln x}{x}$.

Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2cm.

0,5 + 0,25

1. 1.1 Calculer la limite de f en 0 puis en déduire une interprétation graphique du résultat obtenu.

 1.2 Calculer la limite de f en $+\infty$. 0,5

2. 2.1 Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. 0,5

 2.2 Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D). 0,5 + 0,5

 2.3 Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D). 0,5

3. 3.1 Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ 0,5 + 0,25

 3.2 En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. 0,5 + 0,25

4. Ecrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1. 0,5

5. Construire (D), (T) et $(\mathscr{C})$. prend $\alpha = 1,3$ 0,25 + 0,25 + 0,75

6. On considère la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = \left(1 - \dfrac{1}{2}\ln x\right)\ln x$.

 6.1 Calculer $h'(x)$. 0,5

 6.2 En déduire la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur $\dfrac{1}{2}e^2$ en e. 0,75

Exercice 1 (1)

1 on a: $P(x)=2x^3+3x^2-5x-6$

1.1 $P(-1)=0$ 0,25

1.2 $P(x)=(x+1)(2x^2+x-6)$ 0,5

$P(x)=0 \iff (x+1)(2x^2+x-6)=0$

$\iff x=-1$ ou $2x^2+x-6=0$

$\iff x=-1$ ou $x=-2$ ou $x=+\frac{3}{2}$

$S=\{-1;-2;+\frac{3}{2}\}$ 0,5

2.1 $\ln x+\ln(2x+1)=\ln 6$

Soit V l'ensemble de validité de l'équation

$x\in V \iff x>0;\ 2x+1>0$ donc

$V=]0;+\infty[$ 0,25

Pour $x\in V$

$\ln x+\ln(2x+1)=\ln 6$

$\ln(2x^2+x)=\ln 6$

$2x^2+x-6=0 \iff$

$x=-2;\ x=+\frac{3}{2}$

$S=\{3/2\}$ 0,5

2.2 $2(\ln x)^2+3\ln x-5=\frac{6}{\ln x}$

contrainte sur l'inconnue x : $x>0$ et $x\neq 1$ donc

$x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$ 0,25

Pour $x>0$ et $x\neq 1$

$2(\ln x)^2+3\ln x-5=\frac{6}{\ln x}$

$2(\ln x)^3+3(\ln x)^2-5\ln x=6$

Posons $X=\ln x$ alors on a:

$2X^3+3X^2-5X=6$

$2X^3+3X^2-5X-6=0 \iff$

$X=-1$ ou $X=-2$; ou $X=\frac{3}{2}$

d'après 1.2. or $X=\ln x$ alors

$\ln x=-1;\ \ln x=-2;\ \ln x=\frac{3}{2}$

$x=e^{-1};\ x=e^{-2};\ x=e^{3/2}$ 0,5

d'où $S=\{e^{-1}; e^{-2}; e^{3/2}\}$

2.3 $\ln x^2+\ln(2x+3)\leq \ln(5x+6)$

Soit Ev l'ensemble de validité de l'inéquation.

$x\in E_V \iff x\neq 0;\ 2x+3>0;\ 5x+6>0$

alors $E_V=]-\frac{6}{5};0[\cup]0;+\infty[$ 0,25

Pour $x\in E_V$

$\ln x^2+\ln(2x+3)\leq \ln(5x+6)$

$2x^3+3x^2\leq 5x+6$

$2x^3+3x^2-5x-6\leq 0$

$(x+1)(2x^2+x-6)\leq 0$ d'après 1

or $(x+1)(2x^2+x-6)=0 \iff$

$x=-1;\ x=-2;\ x=3/2$

x	$-\frac{6}{5}$		0		$3/2$		$+$
$x+1$		$+$		$+$		$+$	
$2x^2+x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(2x^2+x-6)$		$-$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau

$S=]-\frac{6}{5};0[\cup]0;3/2]$ 0,75

$S=[-1;0[\cup]0;\frac{3}{2}]$

2.4 $2\ln x+1\geq \frac{6}{\ln x}$

contrainte sur x :

$x>0$ et $x\neq 1$

Pour $x>0$ et $x\neq 1$ 0,25

$$2\ln x + 1 \geq \frac{6}{\ln x}$$

$$2\ln x + 1 - \frac{6}{\ln x} \geq 0$$

$$\frac{2(\ln x)^2 + \ln x - 6}{\ln x} \geq 0$$

Posons $X = \ln x$ alors on a:

$$\frac{2X^2 + X - 6}{X} \geq 0$$

Posons $2X^2 + X - 6 = 0$

$2X^2 + X - 6 = 0 \Leftrightarrow X = -2$ ou $X = \frac{3}{2}$

X	$-\infty$	-2		0		$3/2$		$+\infty$
$2X^2+X-6$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
X	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2X^2+X-6}{X}$	$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc : $\frac{2X^2+X-6}{X} \geq 0 \Leftrightarrow$

$X \in [-2; 0[\cup [3/2; +\infty[$

or $X = \ln x$ alors

$e^{-2} \leq x < 1$ ou $x \geq e^{3/2}$ 0,75

D'où $S = [e^{-2}; 1[\cup [e^{3/2}; +\infty[$

Exercice 2

on a : 3 boules numérotées 1; 2; 3.

4 boules vertes numérotées 4; 5; 6; 7.

et 2 boules blanches numérotées 8; 9.

1.1) Le nombre de résultats différents possibles qu'on peut avoir.

$A_9^3 = 504$ 0,5

1.2. Le nombre de possibilités est

$A_5^3 = 60$

1.3 . Ce nombre est

$3! + 4 \times 3 \times 2 = 6 + 24 = 30$

$A_3^3 + A_4^3 = 30$

2.1 Il y a

$C_9^3 = 84$

2.2 Le nombre de possibilités est

$3 \times 4 \times 2 = 24$

2.3 Ce nombre de possibilités est :

$2 \times 21 = 42$

$C_2^1 \times C_7^2 =$

2.4 Il y a

$C_4^2 \times C_5^1 = 6 \times 5 = 30$

Problème (1)

Partie A Problème

on a g définie sur $]0;+\infty[$ par

1.1 $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

Alors :

$\lim\limits_{x \to 0} x^2 - 2 = -2$
$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
alors $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

1.2. $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

alors $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$

$x > 0$ alors $2x > 0$; $\frac{1}{x} > 0$

donc $g'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$

d'où g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2) g est définie, dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ alors g est bijective de $]0;+\infty[$ sur $g(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$ or $0 \in]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$.

on a : $g(1{,}31) \simeq -0{,}01$

$g(1{,}32) \simeq 0{,}02$

$g(\alpha) = 0$

or $-0{,}01 < 0 < 0{,}02$

alors $g(1{,}31) < g(\alpha) < g(1{,}32)$

d'où $1{,}31 < \alpha < 1{,}32$.

3. g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$; et $g(\alpha) = 0$

Pour $x \in]0;\alpha[$ on a

$0 < x < \alpha$.

alors $g(x) < g(\alpha)$

$g(x) < 0$

d'où $g(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$

Pour $x \in]\alpha;+\infty[$ on a

$\alpha < x$

$g(\alpha) < g(x)$

$0 < g(x)$

donc $g(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$

Partie B

f est définie sur $]0;+\infty[$ par

(2)

$$f(x) = x + \frac{1-\ln x}{x}$$

1.1 :

$f(x) = x + \frac{1}{x} \times (1-\ln x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x + \frac{1}{x}(1-\ln x)\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} 1-\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}(1-\ln x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ d'où

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

1.2 on a; $f(x) =$

$x + \frac{1-\ln x}{x} = x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$

alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$.

or $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2.1 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1-\ln x}{x}$

alors la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

2.2 Etude de la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (D). sur $]0;+\infty[$.

on a: $f(x) - x = \frac{1-\ln x}{x}$

le signe $f(x) - x$ dépend de $1-\ln x$ car pour tout $x \in]0;+\infty[$ $x > 0$

Posons $1 - \ln x > 0$

$\ln x < 1$

$x < e$

donc $f(x) - x > 0$ sur $]0;e$

D'où $(\mathscr{C})$ est au dessus de (D) sur $]0;e[$.

De même $1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e$ alors $(\mathscr{C})$ est en dessous de (D) sur $]e;+\infty[$

2.3 $f(x) = y \Leftrightarrow x + \frac{1-\ln x}{x} = x$

$\Leftrightarrow x = e$

Par conséquent le couple de coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et (D) est $(e;e)$.

on a.

(3)

3.1 $f(x) = x + \frac{1-\ln x}{x}$

alors $f'(x) = 1 + \frac{-1-1+\ln x}{x^2}$

$= \frac{x^2-2+\ln x}{x^2}$

or $g(x) = x^2-2+\ln x$ d'où

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$ car pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^2>0$

Or $g(x)<0$ sur $]0;\alpha[$ et $g(x)>0$ sur $]\alpha;+\infty[$ alors f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4) Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 1 est

$y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$y = -x+3$

6.1) h est définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = (1-\frac{1}{2}\ln x)\ln x$

alors $h'(x) = -\frac{1}{2x}\times \ln x + \frac{1}{x}\ \frac{1l}{2x}$

$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = \frac{1-\ln x}{x}$

6.2 Les primitives G de f sur $]0;+\infty[$ sont définies par $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + h(x) + c$; $c \in$

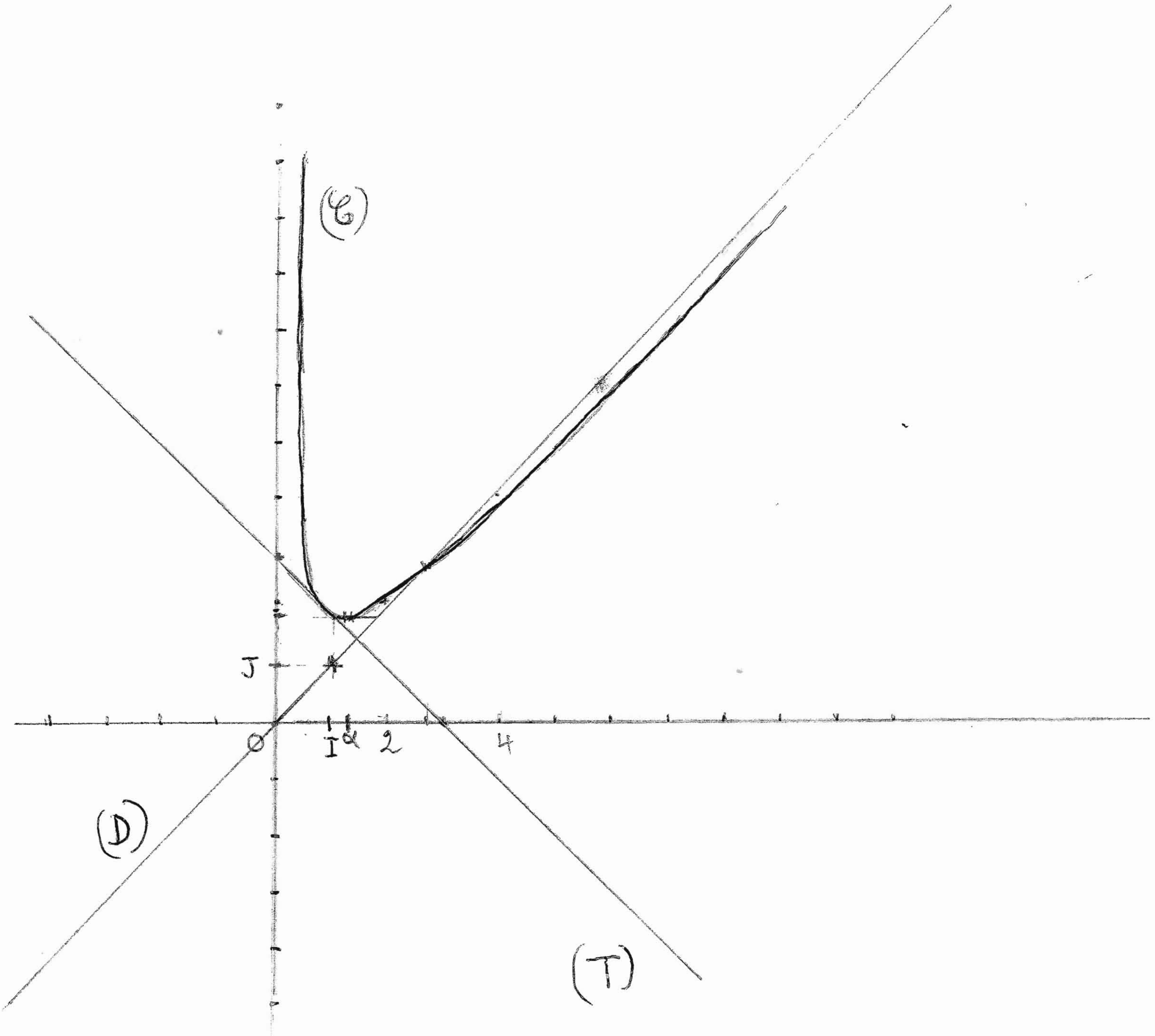
Posons $G(e) = \frac{1}{2}e^2$, alors

$\frac{1}{2}e^2 + h(e) + c = \frac{1}{2}e^2$

$c = -h(e)$

$= -\frac{1}{2}$

Donc la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui prend la valeur $\frac{1}{2}e^2$ en 1 est défini par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + (1-\frac{1}{2}\ln x)\ln x - \frac{1}{2}$



x	1	2	4	1,3
$f(x)$	2	2,1	4	1,9

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE DE L'OGOOUE MARITIME
CRW/DELTA/LJAA/LTB DE PORT GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION –TRAVAIL-JUSTICE

BAC BLANC COMMUNAL
MAI 2009
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SERIE A1
COEFFICIENT 4
DUREE 3HEURES

Exercice I 5pts

On donne $E = x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ et $F = x^2 - \frac{1}{2}x$

1°) Factoriser E

2°) Résoudre dans IR l'équation $F = 0$, puis en déduire les solutions de l'inéquation $F > 0$

3°) On pose $P(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + 3$ avec $a \in IR$

a) Trouver a pour que $P(x)$ soit factorisable par $x - 3$

b) En déduire une factorisation complète de $P(x)$

4°) a) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$

b) en déduire les solutions des équations suivantes :

* $-(\ln x)^3 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{13}{2}\ln x + 3 = 0$

* $\ln x + \ln(x^2 - \frac{1}{2}x) = \ln(\frac{13}{2}x + 3)$

Exercice II 4pts

Pour les questions 1 et 2, on donnera le résultat sous forme de fraction. Obiang a 17 chemises : 12 blanches et 5 vertes. Il range toujours 10 chemises (7 blanches et 3 vertes) du côté gauche de son armoire et 7 chemises (5 blanches et 2 vertes de l'autre côté).

1. Obiang devant partir en voyage pendant 3 jours, a besoin de 3 chemises. Pour cela, il choisit 3 chemises simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire. Soit X le nombre de chemises blanches qu'il choisit.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X
   b. Calculer E (X). En déduire la variance, puis l'écart type de X.
2. Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la chemise qu'il portera dans la journée, Obiang utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable et il prend ensuite une chemise, toujours au hasard, sur le côté choisi. On considère les évènements suivants :

G : « Obiang choisit le côté gauche de l'armoire »

D : « Obiang choisit le côté droit de l'armoire »

B : « Obiang tire une chemise blanche »

V : « Obiang tire une chemise verte »

a) Calculer P (B)

b) Calculer P (G/B) (probabilité conditionnelle de G sachant que B est réalisé, noté aussi P_B (G)).

Problème 11pts

Partie A

On considère f la fonction g définie sur un intervalle $[\frac{1}{e};\ +\infty[$ par $g(x)=\frac{2x}{e}-1-\ln x$.

1. a) Calculer *g'(x)*, où *g'* désigne la fonction dérivée de *g*. Etudier son signe et en déduire le sens de variation de *g*.

   b) Calculer la limite de g lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra écrire $g(x)=x[\frac{2}{e}-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}]$).

   c) Calculer $g(\frac{1}{e})$ et $g(\frac{e}{2})$

   d) Dresser le tableau de variation de *g*.

2. a) Calculer *g*(e) et justifier que *g*(x) $\geq$ 0 pour $x \geq$ e.

   b) Montrer que l'équation *g(x)*=0 admet une unique solution α dans $[\frac{1}{e};\frac{e}{2}]$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

   c) En déduire le signe de *g* sur $[\frac{1}{e};\alpha[$ et sur $]\alpha\ ;e[$

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ (*unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses, 4 cm sur l'axe des ordonnées).*

   a) Tracer la courbe (Γ) de la fonction *g*. Placer les points d'abscisses α et e

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation : *g(x)* $\geq$0.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $[\frac{1}{e};+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2}{e}-x\ln x$.

1) Calculer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$
2) vérifier que *f'(x)*=*g(x)* puis à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de *f*.
3) Justifier que *f* est positive ou nulle sur l'intervalle $[\frac{1}{e};+\infty[$

On ne demande pas de représenter graphiquement la fonction *f.*

Partie C

On considère la fonction *h* définie sur $[\frac{1}{e};\ +\infty[$ par $h(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$

1°) Calculer *h'(x).*

2°) En déduire les primitives de *f* sur $[\frac{1}{e};+\infty[$

EX01

$E = x^2 + \frac{5}{2}x + 1$; $F = x^2 - \frac{1}{2}x$. (1)

1°) Factorisons E.

$E = x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

$\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$x_1 = \dfrac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \dfrac{-1}{2}$

Donc $\boxed{E = (x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)}$ 0,5

2°) $F = 0 \iff x^2 - \frac{1}{2}x = 0$

$\iff x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

$S = \left\{0 ; \frac{1}{2}\right\}$. 0,5

* $F > 0 \iff x^2 - \frac{1}{2}x > 0$

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
F		+	0	−	0	+	

$\boxed{S = \left]-\infty ; 0\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[}$ 0,5

3°) $P(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + ax + 3$.

a°) $P(x)$ est factorisable par $x-3$

$\Rightarrow P(3) = 0$

$P(3) = 0 \iff -27 + \frac{9}{2} + 3a + 3 = 0$

$\iff 3a = 24 - \frac{9}{2} = \frac{39}{2}$

$\iff a = \dfrac{\cancel{39}^{13}}{\cancel{6}_{2}}$

$\boxed{\text{Donc } a = \frac{13}{2}}$ 0,5

Soit $P(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 3$.

$$
\begin{array}{r|l}
-x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 3 & x - 3 \\
\cline{2-2}
x^3 - 3x^2 \phantom{+ \frac{13}{2}x + 3} & -x^2 - \frac{5}{2}x - 1 \\
\cline{1-1}
-\frac{5}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + 3 & \\
\frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{2}x & \\
\cline{1-1}
-x + 3 & \\
x - 3 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc $P(x) = (x-3)\left(-x^2 - \frac{5}{2}x - 1\right)$

$= (3-x)\left(x^2 + \frac{5}{2}x + 1\right)$

$\boxed{P(x) = (3-x)(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)}$ 0,75

4°)

a°) $P(x) = 0 \iff 3 - x = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou

$\iff x = 3$ ou $x = -2$ ou $x =$

$\boxed{S = \left\{-2 ; -\frac{1}{2} ; 3\right\}}$. 0,25

b°) Résolvons $-(\ln x)^3 + \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{13}{2}\ln x + 3$

L'ens de validité $V = \left]0 ; +\infty\right[$ 0,25

Posons $X = \ln x$.

on a : $-X^3 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{13}{2}X + 3 = 0$.

D'après 4°) a°) on a :

$X = -2$ ou $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 3$

$\iff \ln x = -2$ ou $\ln x = -\frac{1}{2}$ ou $\ln x = 3$

$\iff x = e^{-2}$ ou $x = e^{-1/2}$ ou $x = e^3$

Comme e^{-2}, $e^{-1/2}$ et $e^3 \in \left]0 ; +\infty\right[$

Alors $S = \left\{e^{-2} ; e^{-1/2} ; e^3\right\}$

ou $\boxed{S = \left\{\frac{1}{e^2} ; \frac{1}{\sqrt{e}} ; e^3\right\}}$ 0,75

COLLEGE RAPONDA WALKER
CENSEUR 2nd CYCLE
B.P. 590

1°) $X = \{0;1;2;3\}$.

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$$

$$P(X=1) = \frac{C_7^1 \times C_3^2}{C_{10}^3} = \frac{7\times 3}{120} = \frac{21}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_7^2 \times C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{21\times 3}{120} = \frac{63}{120}$$

$$P(X=3) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{35}{120}.$$

D'où la loi de probabilité :

Valeurs de X ou x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$ ou P_i	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$

01

5°) $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i = 0\times\frac{1}{120} + 1\times\frac{21}{120} + 2\times\frac{63}{120} + 3\times\frac{35}{120} = \frac{252}{120} = \frac{126}{60} = \frac{63}{30} = \frac{21}{10}$

Donc $\boxed{E(X) = \frac{21}{10}}$ 0,5

$$E(X^2) = 0^2\times\frac{1}{120} + 1^2\times\frac{21}{120} + 2^2\times\frac{63}{120} + 3^2\times\frac{35}{120}$$

$$= \frac{588}{120} = \frac{294}{60} = \frac{147}{30} = \frac{49}{10}$$

Donc $E(X^2) = \frac{49}{10}$.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{49}{10} - \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{49}{10} - \frac{441}{100}$$

$V(X) = \frac{490-441}{100} = \boxed{\frac{49}{100}}$ 0,5

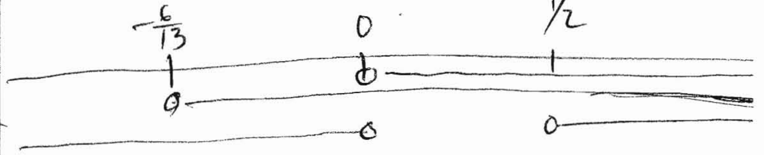
D'où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \boxed{\frac{7}{10}}$ 0,5

*Résolvons l'équat° ~~ln x + ln(x² − ½x) =~~
$\ln x + \ln(x^2 - \frac{1}{2}x) = \ln(\frac{13}{2}x + 3)$.

L'ens de validité est l'ens des x t…

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - \frac{1}{2}x > 0 \\ \frac{13}{2}x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]0;+\infty[\\ x \in]-\infty;0[\cup]\frac{1}{2};+\infty[\\ x \in]-\frac{6}{13};+\infty[\end{cases}$$

$V =]0;+\infty[\cap (]-\infty;0[\cup]\frac{1}{2};+\infty[) \cap]-\frac{6}{13}$…



$\boxed{V =]\frac{1}{2};+\infty[}$ 0,25

$$\ln x + \ln(x^2 - \tfrac{1}{2}x) = \ln(\tfrac{13}{2}x + 3)$$

$$\Leftrightarrow \ln[x(x^2 - \tfrac{1}{2}x)] = \ln(\tfrac{13}{2}x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{13}{2}x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{13}{2}x - 3 = 0$$

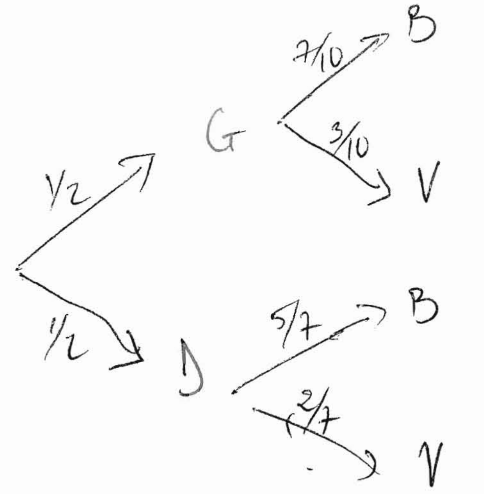
$$\Leftrightarrow P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } x\text{:}$$

$-2 \notin V$; $-\frac{1}{2} \notin V$; $3 \in V$

Alors $\boxed{S = \{3\}}$ 0,75

2°)



a°) $B = (B \cap G) \cup (B \cap D)$

les évènements G et D sont incompatibles

Alors $B \cap G$ et $B \cap D$ sont incompatibles

Donc $P(B) = P(B \cap G) + P(B \cap D)$.

$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{7}{20} + \frac{5}{14}$

$= \frac{49 + 50}{140} = \frac{99}{140}$

Donc $\boxed{P(B) = \frac{99}{140}}$ (01)

b°) $P(G/B) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{7}{10}}{\frac{99}{140}} = \frac{\frac{7}{20}}{\frac{99}{140}} = \frac{7}{\cancel{20}_{1}} \times \frac{\cancel{140}^{7}}{99}$

$= \frac{49}{99}$

Donc $\boxed{P(G/B) = \frac{49}{99}}$ (01)

Problème

Partie A $g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$; $D_g = [\frac{1}{e} ; +\infty[$

1°) (A)

a°) $g'(x) = \frac{2}{e} - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2x - e}{e \cdot x}}$ (0,5)

le signe de $g'(x)$ dépend de $2x - e$ car $ex > 0$ dans $[\frac{1}{e} ; +\infty[$.

x	$-\infty$	$1/e$		$e/2$		$+\infty$
$2x-e$			$-$	0	$+$	

(0,5)

Dans $[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}]$; $g'(x) \leq 0 \Rightarrow g$ est $\searrow$ (0,25)

Dans $[\frac{e}{2} ; +\infty[$; $g'(x) \geq 0 \Rightarrow g$ est $\nearrow$.

b°) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\frac{2}{e} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ (1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{e} - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right] = \frac{2}{e}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. (0,5)

c°) $g(\frac{1}{e}) = \frac{\frac{2}{e}}{e} - 1 - \ln(\frac{1}{e})$

$= \frac{2}{e^2} - 1 + 1 = \boxed{\frac{2}{e^2}}$ (0,5)

$g(\frac{e}{2}) = \frac{2 \times \frac{e}{2}}{e} - 1 - \ln(\frac{e}{2})$

$= 1 - 1 - \ln e + \ln 2$

$= \boxed{-1 + \ln 2}$. (0,5)

d°)

x	$1/e \simeq 0,36$	α		$e/2 \simeq 1,36$		$e \simeq 2,72$	$+\infty$
$g'(x)$			$-$	0	$+$		
$g(x)$	$\frac{2}{e^2} \simeq 0,27$	0 $\searrow$		$-1 + \ln 2 \simeq -0,31$	$\nearrow$	0	$+\infty$

(0,5)

2°) (B)

a°) $g(e) = \frac{2e}{e} - 1 - \ln e$

$= 1 - 1 = \boxed{0}$ (0,25)

$x \in [e ; +\infty[\Rightarrow x \geq e$; comme g est croissante sur $[e ; +\infty[$ alors

$g(x) \geq g(e)$

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

Donc $g(x) \geq 0$ pour $x \geq e$. (0,5)

b°) Mque l'équat: $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}]$.

on a: g est dérivable sur $[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}]$.

g est stt décroissante sur $[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}]$

$g(\frac{1}{e}) = \frac{2}{e^2} > 0$ et $g(\frac{e}{2}) = -1 + \ln$

Alors l'équat: $g(x) = 0$ admet une u

solut: α dans $[\frac{1}{e} ; \frac{e}{2}]$. (0,5)

Encadrons α à 10^{-2} près.

on a $g(0,55) \simeq 0,003$

$g(0,56) \simeq -0,008$

D'où $\boxed{0,55 < \alpha < 0,56}$ (0,75)

c°) Dans $[\frac{1}{e} ; \alpha[$; $g(x) > 0$ et dans $]\alpha ; e[$; $g(x) < 0$ (0,5)

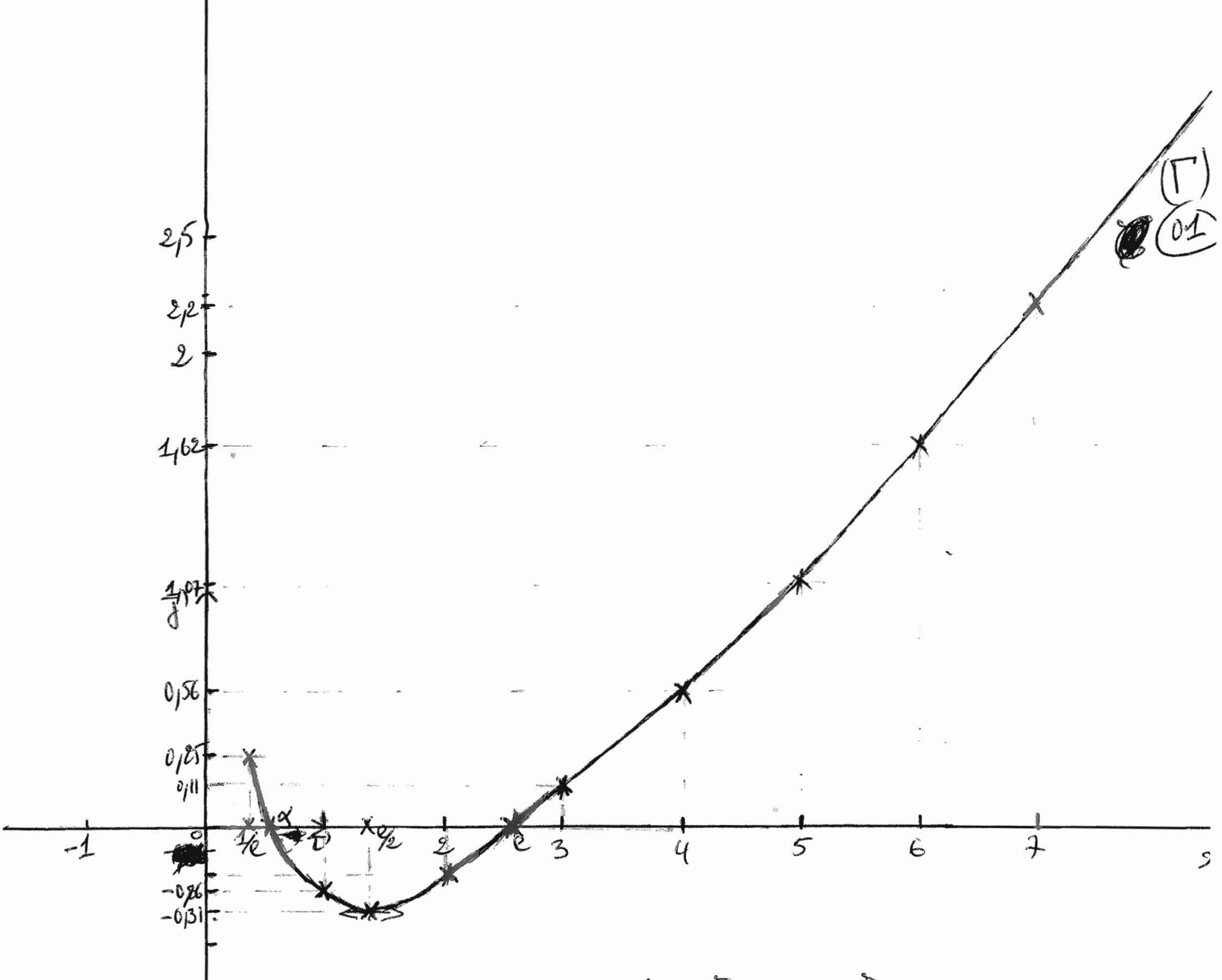
3°) a°)

x	$\frac{1}{e} \simeq 0,36$	$1/2$	1	$\frac{e}{2} \simeq 1,36$	2	3
$g(x)$	$\frac{2}{e^2} \simeq 0,27$	$\frac{1}{e} - 1 - \ln\frac{1}{2} \simeq 0,06$	$\frac{2}{e} - 1 \simeq -0,26$	$-1 + \ln 2 \simeq -0,31$	$\frac{4}{e} - 1 - \ln 2 \simeq -0,22$	$\frac{6}{e} - 1 - \ln 3 \simeq 0,11$

x	5	6	7	e
$g(x)$	$\frac{10}{e} - 1 - \ln 5 \simeq 1,07$	$\frac{12}{e} - 1 - \ln 6 \simeq 1,62$	$\frac{14}{e} - 1 - \ln 7 \simeq 2,20$	0

COLLEGE RAPONDA WALKER * B.P. 590 - PORT-GENTIL
CENSEUR 2nd CYCLE

Courbe



5°) dans $[\frac{1}{e} ; \alpha] \cup [e ; +\infty[$ on remarque que la courbe (Γ) est au dessus de l'axe des abscisses

Alors $S = [\frac{1}{e} ; \alpha] \cup [e ; +\infty[$. 0,5

Partie B

$$f(x) = \frac{x^2}{e} - x\ln x \ ; \ D_f = \left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$$

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e} - x\ln x =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[\frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}\right] = ?$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ (1)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x} = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{e}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[\frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$ 0,75

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2°) $f'(x) = \frac{2x}{e} - \left(\ln x + \frac{\frac{x}{1}}{x}\right)$

$= \frac{2x}{e} - \ln x - 1$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x}$$ 0,75

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{e^2}}{e} - \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$= \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e} = \frac{1+e^2}{e^3}$

x	$\frac{1}{e}$		$\alpha \simeq 0,55$		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1+e^2}{e^3}$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

$f(e) = \frac{e^2}{e} - e\ln e$

$f(e) = e - e = 0$

COLLEGE RAPONDA WALKER · B.P. 550 · CENSEUR 2nd CYCLE

f est positive ou nulle sur $\left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$ car son minimum est 0. 0,5

Partie C

$$h(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x \ ; \ D_h = \left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$$

1°) $h'(x) = -\frac{2}{4}x + \frac{1}{2}\left(2x\ln x + \frac{x^2}{x}\right)$

$= -\cancel{\frac{1}{2}x} + x\ln x + \cancel{\frac{1}{2}x}$

$$\boxed{h'(x) = x\ln x}$$ 0,75

2°) soit F l'ens des primitives de f sur $\left[\frac{1}{e} ; +\infty\right[$.

on a : $F(x) = \frac{1}{e}\frac{x^3}{3} - \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x\right)$

$$\boxed{F(x) = \frac{x^3}{3e} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + c}$$ 0,5

$c \in \mathbb{R}$.