MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE
DE L'OGOOUE MARITIME
PORT - GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
****
Union – Travail – Justice

BAC BLANC COMMUNAL Avril 2010
Epreuve de MATHEMATIQUES

Série : **A1**
Durée : 3 heures
Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5,5 points)

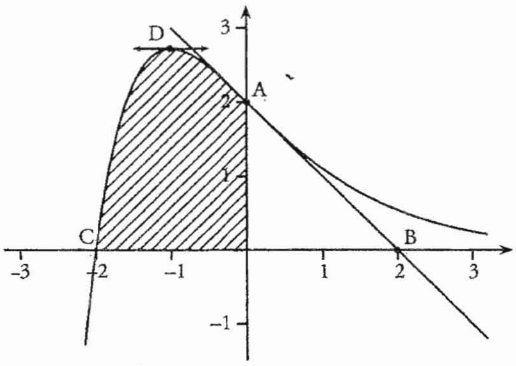
Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$.

1°) a) Calculer P(2) et en déduire une factorisation de P.
   b) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
   c) Etudier le signe de $P(x)$.

2°) En déduire la résolution dans IR des équations et inéquations suivantes :
   a) $2\ln x + \ln(x-1) = \ln(4x-24)$;
   b) $(\ln x)^2 - \ln x - 14 + \dfrac{24}{\ln x} = 0$;
   c) $\ln x + \ln(x^2 - 16) \geq \ln(x^2 - 2x - 24)$;
   d) $\ln(x^3 - x^2) < \ln(7x - 12) + \ln 2$.

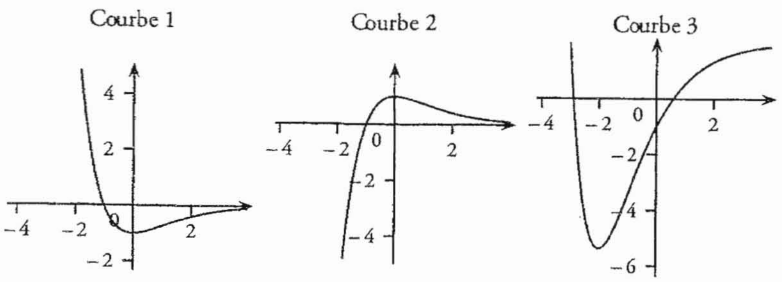
EXERCICE 2 (4,5 points)

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1°) Lire l'ensemble de définition D_f de f.
2°) Lire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3°) Préciser éventuellement les asymptotes à (C_f).
4°) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
5°) En déduire le tableau de variation de f.
6°) Lire $f(0)$ et $f'(0)$.
   En déduire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.
7°) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution.
   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.

8°) Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une primitive F de f sur D_f.
   a) Déterminer la courbe associée à f'.
   b) Déterminer la courbe associée à F.
   (Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix)



PROBLEME (10 points)

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1°) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2°) a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de g.

b) Dresser son tableau de variation.

3°) Calculer g(1). Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{-1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$.

On note $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 4cm

1°) a) Calculer la limite de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer la limite de f en $+\infty$.

c) Calculer $f'(x)$ de f et montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

En déduire le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x

d) Donner les variations de f puis dresser son tableau de variation.

2°) a) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β dans $]0\,;+\infty[$. $(\alpha < \beta)$

b) Justifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$ et $2{,}3 < \beta < 2{,}4$

3°) Soit (Δ) la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

a) Etudier le signe de l'expression $d(x) = f(x) - (-\frac{1}{2}x + 1)$.

En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à (Δ).

b) Démontrer que la droite (Δ) est une asymptote à $(\mathscr{C})$.

4°) Construire avec soin la droite (Δ) et la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Prendre $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}3$

5°) Déterminer une primitive sur$]0\,;+\infty[$ de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x}\ln x$

En déduire la primitive F de f sur$]0\,;+\infty[$ prenant la valeur $\frac{-1}{4}$ en 1.

Exercice 1 A1

①

1/ a) $P(2) = 0$

$P(x) = (x-2)(x^2+x-12)$ ou $(x-2)(x-3)(x+4)$

b) $P(x) = 0$ $S = \{2; 3, -4\}$

c)

x	$-\infty$		-4		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-12		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

si $x \in]-\infty, -4[\cup]2; 3[$ $P(x) < 0$

si $x \in]-4, 2[\cup]3, +\infty[$ $P(x) > 0$

2/ a) Ensemble de validité $V =]\frac{24}{14}; +\infty[$

Pour $x \in V$ l'équation a) équivaut successivement à :

$\ln[x^2(x-1)] = \ln(14x-24)$

$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

D'après 1/ b) on a $x = 2$ ou $x = 3$ ou $x = -4$

$2 \in V$; $3 \in V$ $-4 \notin V$ d'où $S = \{2, 3\}$

b) Ensemble de validité $V =]0; +\infty[\setminus \{1\}$.

Posons $X = \ln x$. l'équation devient

$X^2 - X - 14 + \frac{24}{X} = 0$

$X^3 - X^2 - 14X + 24 = 0$

D'après 1/ b) $X = 2$ ou $X = 3$ ou $X = -4$

Soit $\ln x = 2$ ou $\ln x = 3$ ou $\ln x = -4$

$x = e^2$ ou $x = e^3$ ou $x = e^{-4}$

$e^2 \in V$ $e^3 \in V$ $e^{-4} \in V$ d'où $S = \{e^2, e^3, e^{-4}\}$

c) Ensemble de validité $V =]6; +\infty[$.

Pour $x \in V$, l'inéquation équivaut successivement à :

$\ln(x^3 - 16x) \geq \ln(x^2 - 2x - 24)$

$x^3 - x^2 - 14x + 24 \geq 0$

D'après 1°) c) on a : $x \in [-4, 2] \cup [3; +\infty[$

$S =]6; +\infty[$.

d) Ensemble de validité $V =]\frac{12}{7}, +\infty[$

Pour $x \in V$, l'inéquation équivaut successivement à

$x^3 - x^2 < 14x - 24$.

$x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$

D'après 1°) c) on a : $x \in]-\infty, -4[\cup]2, 3[$.

$S =]2; 3[$.

<u>Barème proposé</u>

1) a) $\rightarrow$ 0,25 + 0,50

b) $\rightarrow$ 0,50

c) $\rightarrow$ 0,75

2°) a) $\rightarrow$ 0,75

b) $\rightarrow$ 0,75

c) $\rightarrow$ 1

d) $\rightarrow$ 1

Exercice 2 A1

3

1) $Df = \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote vertical à (Cf)

4)

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$f'(x)$	$+$ ϕ $-$

5)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$ 0

6) $f(0) = 2$ $f'(0) = -1$

(T) : $y = f'(0)x + f(0)$

$y = -x + 2$

7) a) L'équation $f(x) = 0$ admet une seule ~~équation~~ solution parce que (Cf) coupe la droite $(y = 0)$ des abscisses en un seul point.

b) $S =]-2; +\infty[$

8°) a) la courbe associée à f' passe par le point $E(-1;0)$ ④
et est située au dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]-\infty, -2[$
Donc c'est la courbe C_2

b) La courbe associée à f est croissante sur $]-2, +\infty[$
et décroissante sur $]-\infty, -2[$.
Donc c'est la courbe C_3

Barème proposé

1°) → 0,25
2°) → 0,25 × 2
3°) → 0,25
4°) → 0,50
5°) → 0,25
6° → 0,25 × 2 + 0,50
7° a) → 0,5
b) → 0,5

8°) a) → 0,50
b) → 0,50

Problème A1

(5)

Partie A

a) $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

b) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2-1}{x}$

Pour tout x élément de $]0,+\infty[$ $g'(x) < 0$.

Donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

c) $g(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

Selon le tableau de variation qui précède on a :

* Sur $]0,1]$ $g(1) = 0$ est le minimum de g.
  g est donc positive sur $]0,1]$
  g est donc le maximum de g.
* Sur $]1,+\infty[$ $g(1) = 0$ est le maximum de g
  g est donc négative sur $]1,+\infty[$

Partie B

1/ a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{2}x + 1 = 1$

d'où $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} = -\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$, La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à (C)

b)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x = -\infty$

donc $\lim -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{2x \times \frac{1}{x} - 2\ln x}{4x^2} - \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g'(x)$ car $2x^2 > 0$ sur $]0, +\infty[$

D'après partie A c) on a donc $f'(x) \geq 0$ si $x \in]0, 1]$

$f'(x) \leq 0$ si $x \in [1, +\infty[$

d) Sur $]0, 1]$ f est strictement croissante

Sur $[1, +\infty[$ f est strictement décroissante.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = \frac{1}{2}$

27 a) f est dérivable et strictement croissante sur $]0, 1]$

De plus $\lim\limits_{x \to 0^{>}} f(x)$ et $f(1)$ sont de signes contraires

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique α sur $]0, 1[$

f est dérivable et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $f(\frac{1}{2})$ sont de signes contraires.

L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique β sur $]1, +\infty[$.

En somme, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β sur $]0,+\infty[$.

b) $f(0{,}4)<0$ $\quad f(0{,}5)>0$

$f(0{,}4)$ et $f(0{,}5)$ étant de signes contraires alors $0{,}4<\alpha<0{,}5$

$f(2{,}3)>0$ $\quad f(2{,}4)<0$

$f(2{,}3)$ et $f(2{,}4)$ étant de signes contraires alors $2{,}3<\beta<2{,}4$

3) a) $d(x)=\dfrac{\ln x}{2x}$

x	0		1		$+\infty$
$\dfrac{\ln x}{2x}$	‖	$-$	0	$+$	

- si $x\in]0,1[$ $d(x)<0$ et alors $(\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ) sur $]0,1[$
- si $x\in]1,+\infty[$ $d(x)>0$ et alors $(\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ) sur $]1,+\infty[$

$(\mathcal{C})$ et (Δ) se coupent au point d'abscisse 1.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x}=0$ donc la droite (Δ) ~~d'équation~~ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

4) Voir page 5

5) Posons $u(x)=\ln x$ donc $u'(x)=\dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x}\times\ln x = u'(x)\times u(x)$

Une primitive H de h sur $]0,+\infty[$ est telle que

$H(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

Les primitives F de f sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions telles que $F(x)=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{1}{4}(\ln x)^2$

La primitive F de f sur $]0,+\infty[$ prenant la valeur $-\frac{1}{4}$ en 1 :

$$F(1) = -\frac{1}{4} \quad \text{donc } k = -1$$

d'où $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}(\ln x)^2 - 1$

Barème proposé

Partie A (2,5)

1) a) $\rightarrow$ 0,5 x 2

2) b) $\rightarrow$ 0,75

c) $\rightarrow$ 0,25 + 0,50

Partie B (7,5)

1/ a) $\rightarrow$ 0,50 + 0,25

b) $\rightarrow$ 0,50

c) $\rightarrow$ 1

d) $\rightarrow$ 0,5

2/ a) $\rightarrow$ 0,5 x 2

b) $\rightarrow$ 0,25 x 2

3/ a) $\rightarrow$ 1

b) $\rightarrow$ 0,25

4/ $\rightarrow$ 1

5/ 0,5 x 2