MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D'ACADEMIE
DE L'OGOOUE MARITIME
CRW / DELTA / LJAA / LTB
DE PORT - GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
****
Union – Travail – Justice

BAC BLANC COMMUNAL
Avril 2010

Epreuve de MATHEMATIQUES
Série : B
Durée : 3 heures
Coefficient : 3

EXERCICE 1 (5 points)

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 4x^3 - 16x^2 - 9x + 36$

1. Calculer P(4) puis en déduire l'écriture de $P(x)$ sous la forme de produit de 3 polynômes du 1^er^ degré.
2. a) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$.
   b) Résoudre dans IR l'inéquation $P(x) \leq 0$.
3. En déduire la résolution des équations et l'inéquation suivantes :
   a) $2\ln x + \ln(x - 4) = \ln(9x - 36) - \ln 4$;
   b) $\ln(x^2) = \ln 9 - \ln 4$;
   c) $\ln x + \ln(4x^2 + 39) \leq \ln(16x^2 + 48x + 36)$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2;0]$ et $[2;5]$ et croissante sur l'intervalle $[0;2]$. On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2;5]$.
La courbe (Γ) représentative de la fonction f est tracée en annexe dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points A(-2 ; 9) , B(0 ; 4) , C(1 ; 4,5) , D(2 ; 5) et E(4 ; 0) .
En chacun des points B et D , la tangente à la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses .
On note F le point de coordonnées (3 ; 6). La droite (CF) est la tangente à la courbe (Γ) au point C.

1. A l'aide des informations précédentes et de l'annexe , préciser sans justifier :
   a) les valeurs de f(0), f'(1) et f'(2) ,
   b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2;5]$,
   c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2;5]$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   a) Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle $[-2;4[$.
   b) Calculer g(-2), g(0) et g(2) .
   c) Préciser , en le justifiant , le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[-2;4[$.
   d) Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 4. Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction g.
   e) Dresser le tableau de variation de la fonction g .

PROBLEME **(10 points)**

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = a\,(\ln X)^2 + b\ln x + c$ où a, b, c sont des constantes réelles et on désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
Calculer les valeurs de a, b et c sachant que la courbe (C_g) passe par les points A(1 ;0) et B(e ;1) ; et que (C_g) admet en A une tangente parallèle à la droite d'équation $y = 2x - 3$.

Partie B :

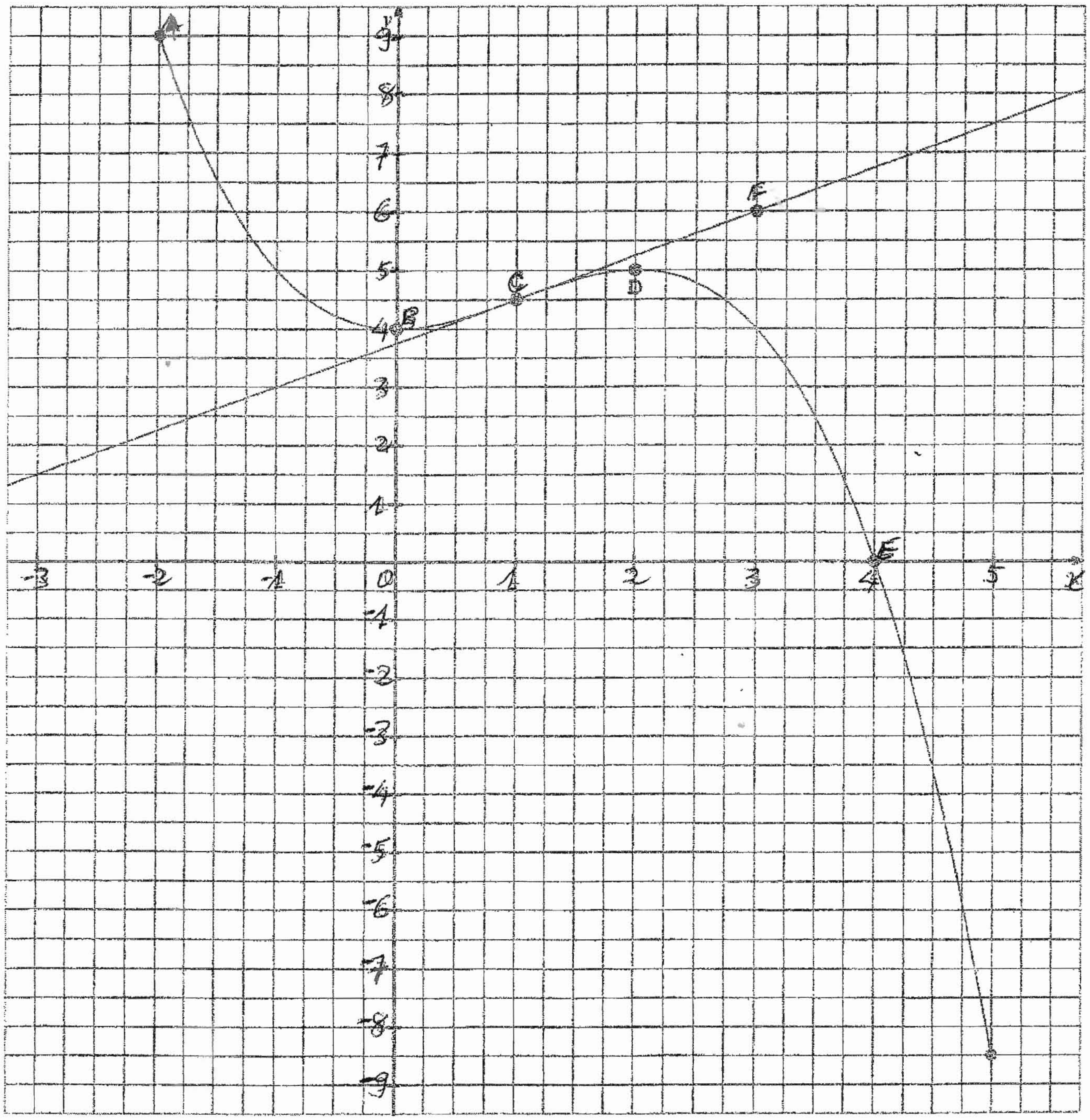
Soit f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$
et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 2cm).

1. a) Montrer que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C).
   b) Calculer la limite de f en $+\infty$ (*On pourra factoriser* $f(x)$).
2. a) f ' désigne la dérivée de f.
   Montrer que pour tout x de$]0\,;+\infty[$ $f'(x)$ a le même signe que $(1 - \ln x)$.
   b) Etudier alors le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
   c) Montrer que pour tout x de$]0\,;+\infty[$ on a $f(x) \leq 1$.
   Comment se situe la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation y = 1 ?
3. Résoudre dans IR l'équation : $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$.
   Que représentent pour la courbe (C) les solutions de cette équation ?
4. Ecrire une équation de chacune des droites (T_1) et (T_2) tangentes à la courbe (C) respectivement aux points d'abscisses 1 et e^2.
5. Représenter (D), (T_1), (T_2) et (C)

Partie C :

Soit F_1 et F_2 les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par : $F_1(x) = x\ln x - x$ et $F_2(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.
1°) Calculer $F_1'(x)$ et $F_2'(x)$.
2°) En déduire, sur $]0\,;+\infty[$, la primitive F de f, qui s'annule en e.

Annexe



CORRIGE TYPE : BAC BLANC 2010
SERIE B

EXERCICE 1 (5pts)

$P(x) = 4x^3 - 16x^2 - 9x + 36$

1) Calcul de $P(4)$

$P(4) = 4\times 4^3 - 16\times 4^2 - 9\times 4 + 36$

$= 256 - 256 - 36 + 36$

$\boxed{P(4) = 0}$ (0,25)

Factorisation de $P(x)$

La méthode de Hörner donne :

	4	-16	-9	36
4	////	16	0	-36
	4	0	-9	0

$P(x) = (x-4)(4x^2-9)$ (0,75)

$\boxed{P(x) = (x-4)(2x-3)(2x+3)}$

2) a) Résolution de l'équation :

$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = \frac{3}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$

$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2} ; 4\right\}}$ (0,5)

b) Résolution de l'inéquation

x	$-\infty$	$-3/2$		$3/2$		4	$+\infty$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$4x^2-9$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

(0,5)

$\boxed{S = \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2} ; 4\right]}$ (0,25)

3) a) $2\ln x + \ln(x-4) = \ln(9x-36) - \ln 4$

Soit V l'ensemble de validité de cette équation.

$x \in V \Leftrightarrow x > 0$, $x - 4 > 0$ et $9x - 36 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$, $x > 4$ et $x > 4$

$V =]4 ; +\infty[$ (0,5)

L'équation équivaut à :

$\begin{cases} x \in V \\ \ln x^2 + \ln(x-4) = \ln\left(\frac{9x-36}{4}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ \ln[x^2(x-4)] = \ln\left(\frac{9x-36}{4}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ x^3 - 4x^2 = \frac{9x-36}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ 4x^3 - 16x^2 - 9x + 36 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = 4 \end{cases}$

d'où $\boxed{S = \emptyset}$ (0,5)

b) $\ln(x^2) = \ln 9 - \ln 4$

$x \in V \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$V = \mathbb{R} - \{0\}$ (0,25)

L'équation devient $\ln(x^2) = \ln\frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ x^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ 4x^2 - 9 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ x = -\frac{3}{2} \text{ ou } x = +\frac{3}{2} \end{cases}$ (0,5)

$\boxed{S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2}\right\}}$

2

2

c) $\ln x + \ln(4x^2+39) \leq \ln(16x^2+48x-36)$

$x \in V \Leftrightarrow x>0$, $4x^2+39>0$ et $16x^2+48x-36>0$

$\Leftrightarrow x>0$, $x \in \mathbb{R}$ et $4x^2+12x-9>0$

$\Leftrightarrow x>0$, $x \in \mathbb{R}$ et ~~x∈~~

$x \in]-\infty ; \frac{-3-3\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{-3+3\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

$V =]\frac{-3+3\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$ 0,5

l'inéquation équivaut à :

$\begin{cases} x \in V \\ \ln(4x^3+39x) \leq \ln(16x^2+48x-36) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in V \\ P(x) \leq 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{S = [\frac{3}{2} ; 4]}$ 0,5

EXERCICE 2

1)

a) $\boxed{f(0) = 4}$ 0,25

$\boxed{f'(1) = 0,75}$ 0,5

$\boxed{f'(2) = 0}$ 0,25

b) signe de $f'(x)$.

x	-2		0		2		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pour tout $x \in [-2;0[\cup]2;5]$ 0,5

$f'(x) < 0$

Pour tout $x \in]0;2[$ $f'(x) > 0$

Pour tout $x \in \{0;2\}$ $f'(x) = 0$

c) Signe de $f(x)$.

Pour tout $x \in [-2;4[$ $f(x) > 0$

Pour tout $x \in]4;5]$ $f(x) < 0$ 0,5

$f(4) = 0$

2) $g(x) = \ln[f(x)]$

a) $D_g = [-2;4[$ car sur $[-2;4[$ $f(x) > 0$ 0,25

b) $g(-2) = \ln[f(-2)]$

$\boxed{g(-2) = \ln 9}$ 0,25

$g(0) = \ln[f(0)]$

$\boxed{g(0) = \ln 4}$ 0,25

$g(2) = \ln[f(2)]$

$\boxed{g(2) = \ln 5}$ 0,25

c) sens de variation de g.

$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ 0,25

or $f(x) > 0$ donc $g'(x)$ et $f'(x)$ ont le même signe, d'où

g est décroissante sur $[-2;0]$ et sur $[2;4[$ et croissante sur $[0;2]$ 0,75

d) $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 0$ et $f(x) > 0$ or $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

donc ~~lim~~

$\boxed{\lim_{x \to 4^-} g(x) = -\infty}$ 0,5

- Interprétation graphique : la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C}_g)$ (0,25)

e) Tableau de variation

x	-2		0		2		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\ln 9$	$\searrow$	$\ln 4$	$\nearrow$	$\ln 5$	$\searrow$	$-\infty$

(0,25)

PROBLEME

Partie A (1,50)

$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$

$g(1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = 0}$ (0,25)

$g(e) = 1 \Leftrightarrow \boxed{a + b = 1}$ (0,25)

$g'(x) = \dfrac{2a\ln x}{x} + \dfrac{b}{x}$ (0,50)

$g'(1) = 2 \Leftrightarrow \boxed{b = 2}$ (0,25)

$a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 2$

$\Rightarrow \boxed{a = -1}$ (0,25)

$g(x) = -(\ln x)^2 + 2\ln x$

Partie B (6,75)

$f(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$

1) a) Montrons que la droite d'équation $x=0$ est asymptote à $(\mathscr{C})$

③

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2\ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$

Par somme $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (0,5)

donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe $(\mathscr{C})$.

b) calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$f(x) = \ln x(2 - \ln x)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \ln x = -\infty$

Par produit

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$ (0,5)

2) a) Montrons que $f'(x)$ a le même signe que $(1 - \ln x)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}$

$\boxed{f'(x) = \dfrac{2}{x}(1 - \ln x)}$ (0,5)

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\dfrac{2}{x} > 0$

donc $f'(x)$ a le même signe que $(1 - \ln x)$ (0,25)

b) sens de variation de f

$1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq e$ (0,75)

sur $]0 ; e]$ $f'(x) \geq 0$ donc f y est croissante et sur $[e ; +\infty[$ $f'(x) \leq 0$ d'où f y est décroissante

Tableau de variation de f

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(0,25)

$f(e) = 2 - 1 = 1$

c) Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$ $f(x) \leq 1$

$$f(x) - 1 = -(\ln x)^2 + 2\ln x - 1$$
$$= -[(\ln x)^2 - 2\ln x + 1]$$
$$= -(\ln x - 1)^2$$

(0,50)

donc $f(x) - 1 \leq 0$ d'où $f(x) \leq 1$

La courbe (C) est en-dessous de la droite (D) d'équation $y = 1$ (0,25)

3) Résolution de l'équation.

$(\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \iff$

$\ln x(\ln x - 2) = 0$ et $x > 0$

$\iff \ln x = 0$ ou $\ln x = 2$

$\iff x = 1$ ou $x = e^2$

$\boxed{S = \{1 ; e^2\}}$ (0,5)

$(\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \iff f(x) = 0$

donc les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses. (0,25)

4) $(T_1) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = 2$ et $f(1) = 0$

donc $\boxed{y = 2x - 2}$ (0,50)

$(T_2) : y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$

$f'(e^2) = \frac{-2}{e^2}$ et $f(e^2) = 0$

donc $\boxed{y = \frac{-2}{e^2} x + 2}$ (0,75)

5) Représentation graphique : (voir page 5)

Partie C (1,75)

1) calcul de $F_1'(x)$ et $F_2'(x)$.

$F_1'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \boxed{\ln x}$ (0,5)

$F_2'(x) = (\ln x)^2 + x \times \frac{2\ln x}{x} - 2\ln x - 2x \times \frac{1}{x} + 2$

$= (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2$

$\boxed{F_2'(x) = (\ln x)^2}$ (0,5)

2) $f(x) = 2\ln x - (\ln x)^2$

$F(x) = 2F_1(x) - F_2(x) + c$

$F(x) = 2x\ln x - 2x - x(\ln x)^2 + 2x\ln x - 2x + c$ (0,5)

$F(x) = 4x\ln x - 4x - x(\ln x)^2 + c$

$F(e) = 0 \iff -e + c = 0 \iff c = e$

d'où $\boxed{F(x) = 4x\ln x - 4x - x(\ln x)^2 + e}$ (0,25)

5