MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

Direction d'Académie Provinciale

de L'Ogooué - Maritime

Service des Examens et Concours

REPUBLIQUE GABONAISE

Union - Travail - Justice

BAC BLANC PROVINCIAL

Session de : Avril - Mai 2012

Epreuve de Mathématiques

Série : A_1 et B **Durée** : 3h **Coef** : 4 et 3

EXERCICE 1 :(5points)

MBA et MBADINGA sont deux jumeaux. MBA qui est fumeur dépense 3000fcfa par an pour l'achat de ses cigarettes. MBADINGA, qui ne fume pas, lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme dans une banque plutôt que de continuer à fumer.

Il lui propose de déposer le 2 Janvier de chaque année, les 3000fcfa sur un compte rémunéré à intérêts composés par la banque au taux annuel de 3%. Le 31 Décembre de chaque année la banque ajoute les intérêts acquis sur le compte. Le 2 janvier 1999, il verse 3000fcfa, et les intérêts sont capitalisés le 31 Décembre 1999. Tous les ans, le 2 Janvier, il verse à nouveau 3000fcfa.

1. Quelle est la somme disponible le livret de MBA aux dates suivantes :
   a. Le 3 Janvier 2000 ?
   b. Le 3 Janvier 2001 ?
2. On note U_0 la somme disponible sur le livret le 3 Janvier 1999, U_1 la somme disponible sur le livret le 3 Janvier 2000, U_2 la somme disponible sur le livret le 3 Janvier 2001 et U_n la somme disponible sur le livret le 3 Janvier de l'année 1999 + n, où n est un entier naturel. Montrer que $U_{n+1} = 1{,}03U_n + 3000$
3. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n + 100000$.
   a. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de V_n en fonction de n, puis celle de U_n en fonction de n.
4. MBADINGA affirme qu'en moyenne, un fumeur s'arrête après avoir fumé pendant 30ans. De quelle somme MBA aurait-il pu disposer le 3 Janvier 2029 ?

EXERCICE 2 : (5points)

Le tableau suivant donne l'évolution du nombre de moutons y_i qu'un boucher a pu vendre durant la fête de « Tabaski » de 2001 à 2010.

Années	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de moutons y_i	72	60	72	61	101	108	107	110	115	130

Le plan est rapporté à un repère orthogonal :
1cm sur l'axe des abscisses représente le rang d'une année et 1cm sur l'axe des ordonnées représente 5 moutons. On choisira le point de coordonnées $(0 ; 50)$ comme origine du repère.

1. Représenter le nuage des points $M(x ; y)$ associé à cette série.
2. a. Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 de la série $(x_i ; y_i)$ pour $1 \leq i \leq 5$

b. Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 de la série $(x_i\,;\,y_i)$ pour $6 \leq i \leq 10$
c. Ecrire une équation de la droite (G_1G_2), puis la tracer.

3. On pourra pour les questions qui suivent, utiliser les données du tableau ci-dessous :

$\sum_{i=1}^{10} x_i = 55$	$\sum_{i=1}^{10} y_i = 936$	$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 5769$	$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 385$	$\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 93228$

a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i\,;\,y_i)$ pour $1 \leq i \leq 10$.
b. Calculer les variances $v(x)$ et $v(y)$, et la covariance $cov(x\,;y)$ de la série $(x_i\,;\,y_i)$ à 10^{-2} près.
c. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r entre x et y à 10^{-2} près.
d. Un ajustement affine est-il justifier ? Si oui, déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x ; par la méthode des moindre carrés.

4. On considère $N_i(x_i\,;\,z_i)$ un point de la droite (G_1G_2) et $P_i(x_i\,;\,t_i)$ un point de la droite (D).

Soit $S_i = \sum_{i=1}^{10}(y_i - z_i)^2 = 797{,}47$ et $S_2 = \sum_{i=1}^{10}(y_i - t_i)^2 = 776{,}90$

a. Interpréter chacune des sommes S_1 et S_2.
b. En déduire la droite la mieux indiquée pour représenter cette série statistique.

PROBLEME : (10points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$, où a, b et c sont trois réels. On donne ci-après la courbe représentative (Γ) de la fonction g.

1. a. A l'aide du graphique, indiquer les valeurs de $g(2), g(3)$ et $g'(2)$.
   b. Montrer que l'on a : $a = 2, b = -9$ et $c = 9$.
2. A l'aide du graphique
   a. Dresser le tableau de variation de g sur $]1,+\infty[$
   b. Montrer que $g(x) \geq 0$ sur $]1\,;1.5] \cup [3\,;\,+\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $[\,1.5\,;3\,]$.

Partie B : Etude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 7x + 2\ln(x-1)$

1. a. Déterminer la limite de f en 1. Donner une interprétation graphique.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]1\,;\,+\infty[$
   b. En utilisant la question 2 de la partie A, dresser le tableau de variation complet de f.
3. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[6\,;7]$.
   b. Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.
4. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$ d'unités graphique 1cm en abscisse et 0.5cm en ordonnée.
   a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x = 2$.
   b. Construire (T) et (C_f) dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$.

Partie C : Primitive

Soit H la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par : $H(x) = (x-1)\ln(x-1) - x$.

1. Montrer que $H'(x) = \ln(x-1)$.
2. Déterminer l'expression générale $F(x)$ des primitives de F de f sur $]1\,;\,+\infty[$.

Exercice 1 5 pts

1- La somme disponible sur le livret

a) le 3 Janvier 2000 : $3000 + 3000 \times \frac{3}{100} + 3000 = 6090$ F 0,75

b) Le 3 Janvier 2001 : $6090 + 6090 \times \frac{3}{100} + 3000 = 9272,7$ F 0,75

2°) $U_{n+1} = U_n + U_n \times \frac{3}{100} + 3000 = U_n\left(1 + \frac{3}{100}\right) + 3000 = 1,03\,U_n + 3000$ 0,75

3°) a) $V_n = U_n + 100000$

$V_{n+1} = U_{n+1} + 100000 = 1,03\,U_n + 3000 + 100000$

$= 1,03\,U_n + 103000 = 1,03(U_n + 100000)$

$= 1,03\,V_n$ 1

Alors (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,03$
et de 1er terme $V_0 = 103000$

b) $V_n = V_0 q^n = 103000(1,03)^n$ 0,5

$U_n = V_n - 100000 = 103000(1,03)^n - 100000$ 0,5

4°) $n = 30$ $U_{30} = 103(1,03)^{30} - 100000$

$= 150008,0345$ F 0,75

Exercice 2

2°) a) $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$

$\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 73,2$

$G_1(3;73,2)$.

b) $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=6}^{10} x_i = 8$

$\bar{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=6}^{10} y_i = 114$

$G_2(8;114)$.

c). Equation de la droite (G_1G_2); elle est de la forme $y = ax + b$

avec $a = \frac{114-73,2}{8-3} = 8,16$

$b = 114 - 8,16\times 8 = 48,72$

donc $y = 8,16x + 48,72$

3°) a) $\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 5,5$

$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = 93,6$

3. a) $G(5,5;93,6)$

b) $V(x) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{x}^2 = 8,25$

$V(y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - \bar{y}^2 = 561,84$

c) $cov(x;y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{x}\times\bar{y}$

$cov(x;y) = 62,1$

c) $r = \frac{cov(x;y)}{\sqrt{V(x)\times V(y)}}$

$= 0,91$

d) oui. Parce que

$0,87 \leq r \leq 1$.

Une équation de (D) est de la forme $y = ax+b$

avec $a = \frac{cov(x,y)}{V(x)} = 7,53$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 52,19$

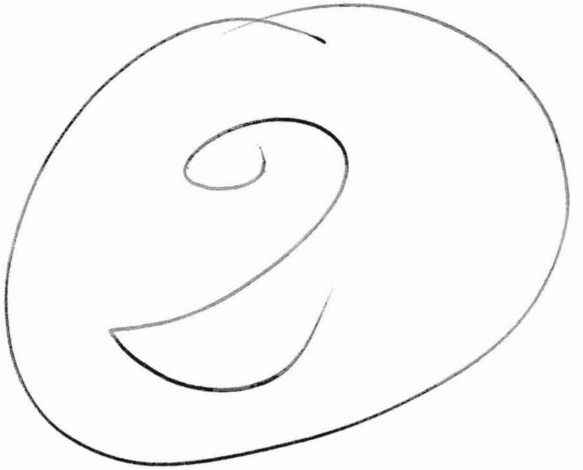
donc $y = 7,53x + 52,19$

4°) a) S_1 est la somme des carrés des écarts entre les points du nuage et les points de la droite (G_1G_2) ayant la même abscisse

S_2 est aussi la somme des carrés des écarts

b) la droite la mieux indiquée est (D) car

$S_2 < S_1$.



Problème 3

on a f une fonction définie par

$f(x) = x^2 - 7x + 2\ln(x-1)$

sur $]1;+\infty[$

1°) a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 7x + 2\ln(x-1)$.

$\lim\limits_{x \to 1} x - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

alors $\lim\limits_{x \to 1} \ln(x-1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1} x^2 - 7x = -6$

$\lim\limits_{x \to 1} 2\ln(x-1) = -\infty$ | donc

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$.

Par conséquent la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à (C_f).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 7x + 2\ln(x-1)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc d'où

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x-1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 7x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2\ln(x-1) = +\infty$

Par suite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2°) a) on a : $f(x) = x^2 - 7x + 2\ln(x-1)$

f est dérivable sur $]1;+\infty[$

$f'(x) = 2x - 7 + 2 \times \dfrac{1}{x-1}$

$= \dfrac{2x^2 - 2x - 7x + 7 + 2}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{2x^2 - 9x + 9}{x-1}$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $2x^2 - 9x + 9$ car $x - 1 > 0$ sur $]1;+\infty[$

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 9$
$= 81 - 72 = 9$; $\sqrt{\Delta} = 3$

$x_1 = \dfrac{9-3}{4}$; $x_2 = \dfrac{9+3}{4} =$

$x_1 = \dfrac{3}{2}$; $x_2 = 3$

x	1		$3/2$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(3/2)$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

3°) a) f est dérivable sur $]1;+\infty[$ et d'après le tableau de variation f est strictement croissante sur $]3;+\infty[$ en particulier sur $[6;7]$ ~~alors f réalise une bijection de [6;7]~~

et $f(6) \simeq -2{,}78 < 0$

$f(7) \simeq 3{,}58 > 0$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique, α, dans $[6;7]$.

b) on a $f(6{,}5) \simeq 0{,}15$ et $f(6{,}4) \simeq -0{,}47$ alors

$6{,}4 < \alpha < 6{,}5$.

4 a) Une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 2 est

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$

or $f'(2) = -1$ et $f(2) = -10$

alors $y = -x - 8$

b).

on a H une fonction définie sur $]1;+\infty[$ par

$H(x) = (x-1)\ln(x-1) - x$

1) H est dérivable sur $]1;+\infty[$

$H'(x) = \ln(x-1) + x-1 \times \frac{1}{x-1} - 1$

$= \ln(x-1) + 1 - 1$

$H'(x) = \ln(x-1)$

2) on a

$f(x) = x^2 - 7x + 2\ln(x-1)$

f est dérivable sur $]1;+\infty[$ alors f est continue sur $]1;+\infty[$ donc f admet des primitives sur $]1;+\infty[$ définies par

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2H(x) + c$

avec $c \in \mathbb{R}$.

4