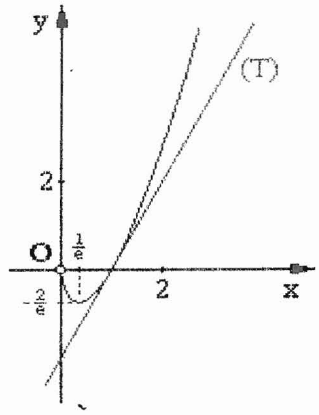
EXAMENS BLANCS-SESSION D'AVRIL 2007
BACCALAUREAT BLANC

Série : A_1 Cœf : 4
Durée : 3 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

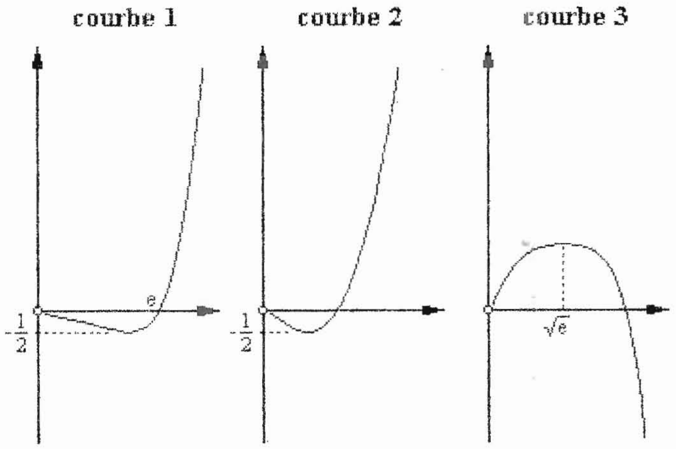
EXERCICE1. (5 points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère (O ; i , j) d'une fonction *f* définie et dérivable sur]0 ; +∞[.
La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1. Par lecture graphique :
   a. Donner les valeurs de $f(1/e)$, de $f\,'(1)$.
   b. Dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle]0 ; 3].

2. On admet que f est la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f\,'(x) = (ax + b)\ln x$
   (a et b sont des nombres réels).
   a. Soit $f\,'$ la fonction dérivée de *f*. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   b. Déterminer alors les valeurs de a et b en utilisant la question 1. a. .
3. L'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique d'une primitive de *f* sur]0 ; +∞[.
   Indiquer le numéro de cette courbe en précisant les raisons de votre choix.



4. On considère les fonctions G et H définies sur]0 ; +∞[par

$$G(x) = (1-\ln x)\,x^2 \qquad \text{et} \qquad H(x) = x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$$

L'une d'entre elles est une primitive de *f* sur]0 ; +∞[de la question 3. Laquelle ? Justifier.

EXERCICE 2. **(4 points)**

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - 2 - 2x\ln x$.

1. On donne ci-dessous le tableau de variations de f.
   a. Justifier le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]0;\sqrt{e}[$ et $]\sqrt{e};+\infty[$.
   b. Calculer la valeur exacte de $f(\sqrt{e})$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ -2	↗	$f(\sqrt{e})$	↘	$-\infty$

2. À l'aide de ce tableau de variations, indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Si ces solutions existent, donner pour chacune d'elles la valeur décimale approchée arrondie au dixième (aucune justification n'est demandée).
3. Indiquer, en justifiant la réponse à l'aide du tableau de variations, si chacune des affirmations suivantes est **vraie** ou **fausse** :
   a. La courbe représentative de f admet dans le plan muni d'un repère orthonormal, une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   b. Toute primitive de f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

PROBLEME. **(11 points)**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; **i** , **j**) (unité graphique 2 cm).
Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

On note (C) sa représentation graphique.

***Partie A :* Étude de la fonction f**

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$; interpréter graphiquement ce résultat.
   b. Déterminer la limite de f en 0 ; on pourra écrire :

$$\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$$

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $\ln(x)$.
   b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;+\infty[$.

Partie B : **Tracé de la courbe (C)**

1. Résoudre l'équation $f(x) = 1$, puis l'inéquation $f(x) > 1$; en déduire la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = 1$.
2. Soit A le point d'intersection de (C) et (Δ).
Préciser le coefficient directeur de la tangente (T) à (C) au point A.
3. Construire (T), (Δ) et (C) dans le repère $(O ; \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Partie C : **Calcul d'aire**

1. Soit u la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = 1 + \ln x$.
On note u' la dérivée de la fonction u. Calculer $u'(x)$.
En déduire une primitive de la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}(1 + \ln x)$

2. Calculer : $I = \int_1^e \frac{1 + \ln(x)}{x}\,dx$

3. On note S l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
   a. En utilisant le résultat de la question 2. c. de la ***Partie A***, exprimer S en fonction de I.
   b. Donner la valeur exacte de S.
   c. En déduire la valeur décimale approchée par défaut de S à 10^{-2} près.

PROPOSITION DE CORRECTION MATHEMATIQUE SERIE A_1

Exercice 1. **(5 points)**

1. a. $\boxed{f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e}}$; $\boxed{f'(1)=\frac{-2-0}{0-1}=2}$.

b. Tableau de signe de *f* sur $]0;3]$:

x	0		1		3
f(x)	||	-	0	+	

2. a. $f'(x)=a\ln x+(ax+b)\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \boxed{f'(x)=a+\frac{b}{x}+a\ln x}$.

b. $\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e} \\ f'(1)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{e}+b\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{2}{e} \\ a+\frac{b}{1}+a\ln(1)=2 \end{cases}$, après

résolution, on a : $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ et $\boxed{f(x)=2x\ln x}$.

3. Sur $]0;1]$, $f(x)\leq 0$, donc sa primitive est décroissante sur cet intervalle et sur $]1;+\infty[$, $f(x)>0$, donc sa primitive est strictement croissante sur cet intervalle.
La courbe 2 correspond donc à la primitive de la fonction *f*.

4. $H'(x)=2x\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)+x^2\left(\frac{1}{x}\right)=2x\ln x-\frac{2x}{2}+\frac{x^2}{x}$
$=2x\ln x-x+x=2x\ln=f(x)$.
La fonction H est donc une primitive de la fonction *f*.

Exercice 2. **(4 points)**

1. a. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{f'(x)=1-2\ln x}$.
$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-2\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\leq e^{1/2} \Leftrightarrow x\leq\sqrt{e}$
donc sur $]0;\sqrt{e}[$, $f(x)>0$, sur $]\sqrt{e};+\infty[$, $f(x)<0$ et pour $x=\sqrt{e}$, $f(x)=0$.

b. $f(\sqrt{e})=3\sqrt{e}-2-2\sqrt{e}\ln\sqrt{e} \Leftrightarrow \boxed{f(\sqrt{e})=2\sqrt{e}-2}$.

2. Sur $]0;\sqrt{e}[$, *f* est strictement croissante et change de signe donc $f(x)=0$ admet une solution.
Sur $]\sqrt{e};+\infty[$, *f* est strictement décroissante et change également de signe donc $f(x)=0$ admet aussi une solution.
En conclusion sur $]0;+\infty[$, $f(x)=0$ admet deux (2) solutions qui sont $\alpha_1=0{,}4$ et $\alpha_2=3{,}3$ au dixième près.

3. a. affirmation vraie, car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$.

b. affirmation fausse, car sur $]\sqrt{e};+\infty[$, *f* est strictement négative donc sa sera strictement décroissante.

PROBLEME. **(11 points)**

Partie A

1.a. $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$. La droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale à (C).

b. $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty}$. L'axe des ordonnées est asymptote à (C).

2.a. $f'(x)=-\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{\ln x-1+1}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\frac{\ln x}{x^2}}$.
Sur $]0;+\infty[$, $x^2>0$ donc le signe de *f'(x)* dépend de celui de $\ln x$.

b. Sur $]0;1[$, $\ln x<0$, soit $f'(x)<0$ alors *f* est strictement décroissante ; sur $[1;+\infty[$, $\ln x\geq 0$, soit $f'(x)\geq 0$ alors *f* est croissante.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	||	-	0	+	
f(x)	||	1 $\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. Sur $]0;+\infty[$, *f* admet 0 comme minimum donc $f(x)\geq 0$.

Partie B

1.* $f(x)=1 \Leftrightarrow 1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}=1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0$
$\Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}$ donc $S=\left\{\frac{1}{e}\right\}$.

* $f(x)>1 \Leftrightarrow 1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}>1 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}<0 \Leftrightarrow \ln x+1<0$
$\Leftrightarrow \ln x<-1 \Leftrightarrow x<e^{-1}$ donc $S=\left]-\infty;\frac{1}{e}\right[$.

* $f(x)-1=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

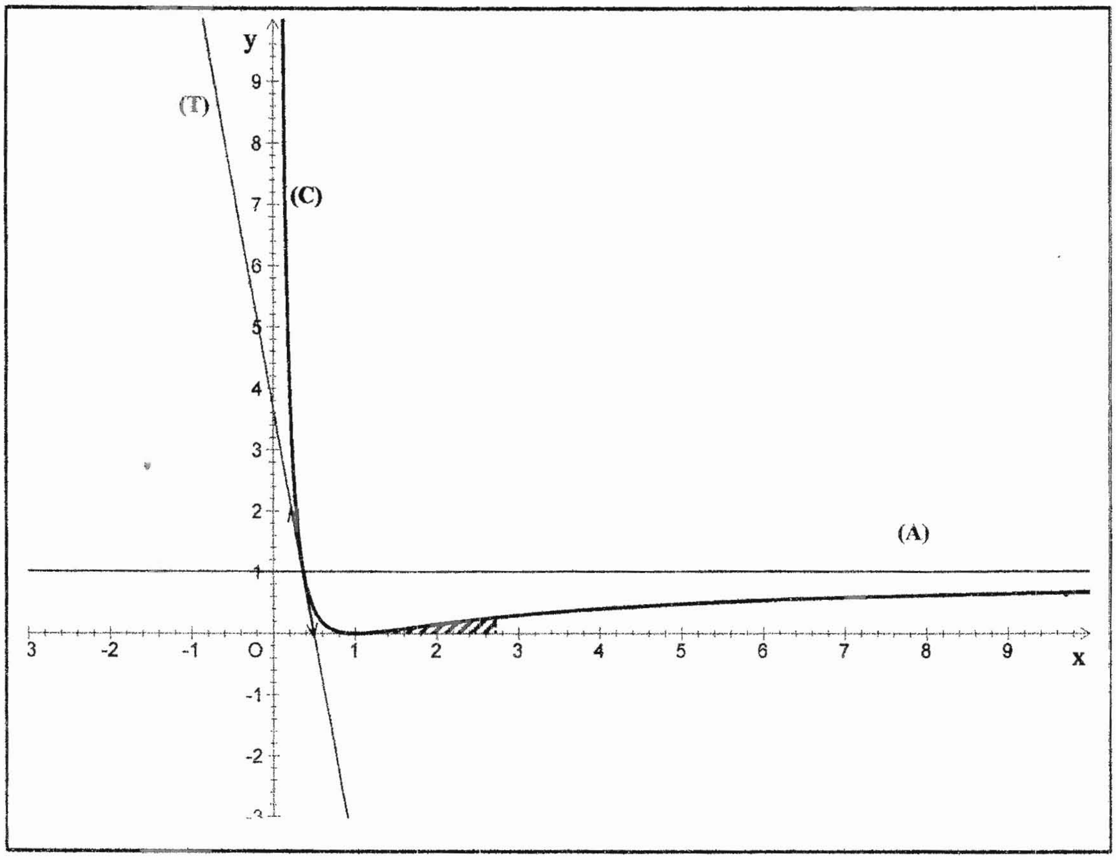
Sur $\left]-\infty;\frac{1}{e}\right[$, $f(x)-1>0$, alors (C) est au dessus de (Δ)

Sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$, $f(x)-1<0$, alors (C) est en dessous de (Δ)

Pour $x=\frac{1}{e}$, $f(x)-1=0$, alors (C) et (Δ) ont un point commun.

2. $(C)\cap(\Delta) = A$ et $A\left(\frac{1}{e};1\right)$. Le coefficient directeur de la tangente (T) en A est $\boxed{f'\left(\frac{1}{e}\right) = -e^2}$.

3. Construction de (T), (Δ) et (C).



Partie C

1. * $\boxed{u'(x) = \frac{1}{x}}$.

* $g(x) = \frac{1}{x}(1+\ln x)$ on reconnaît la forme : $u' \times u$.

Donc une primitive de la fonction g est $\frac{1}{2}u^2$, soit

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{2}(1+\ln x)^2}.$$

2. $I = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^e \frac{1}{x}(1+\ln x)dx = \left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_1^e$

$$= \left(\frac{1}{2}(1+\ln e)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(1+\ln 1)^2\right) = \left(\frac{1}{2}\times 4\right) - \left(\frac{1}{2}\times 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I = \frac{3}{2}}.$$

3.a. Sur $]0;+\infty[$, $f(x) \geq 0$, alors $S = \int_1^e f(x)dx \times 4\,cm^2$,

c-à-d :

$$S = 4\times\int_1^e \left(1-\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)\right)dx = 4\times\left(\int_1^e dx - \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx\right)$$

$$= 4\times\left(\left[x\right]_1^e - I\right) \text{ soit } \boxed{S = 4(e-1) - 4I}.$$

b. $S = 4(e-1) - 4\times\frac{3}{2} \Leftrightarrow \boxed{S = (4e-10)cm^2}$.

c. $\boxed{S = 0{,}87\,cm^2}$ à 10^{-2} près par défaut.