EXAMENS BLANCS-SESSION D'AVRIL 2007
BACCALAUREAT BLANC

Série : B Cœf : 3
Durée : 3 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE1. (5 points)

Une ménagère prépare des bâtons de manioc qu'elle vend au marché du village.
Le coût de production, exprimé en francs CFA, de x bâtons de manioc, est $C(x) = 0{,}1x^2 + 38x + 4770$ avec $x \in [0;500]$.
On suppose que tous les bâtons de manioc préparés sont vendus au prix de 100 frs.

1. Déterminer le coût de production de 300 bâtons de manioc et la recette correspondant à la vente de toute cette production.
2. le bénéfice de la ménagère est la différence entre la recette et le coût.
   (Un bénéfice négatif correspond à une perte)
   a) En utilisant les résultats de la question 1., déterminer les bénéfices de la ménagère pour la production et la vente de ces 300 bâtons de manioc.
   b) Déterminer, en fonction de x, le bénéfice $B(x)$ effectué par la ménagère lorsqu'elle produit et vent x bâtons de manioc.
   c) Déterminer la quantité de bâtons de manioc que la ménagère doit produire et vendre pour que son bénéfice soit positif.
   d) Quel est le bénéfice maximum de la ménagère et le nombre de bâtons de manioc preparés et vendus correspondant.

EXERCICE 2. (4 points)

On considère le polynôme P définie par : $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 15x + 9$.

1. Calculer $P(\sqrt{2})$ et $P(3)$. En déduire une factorisation de P.
2. Etudier le signe de $P(x)$.
3. En utilisant la question précédente et sans faire de calculs, donner en le justifiant soigneusement, le signe de : $P(3{,}0001)$; $P(2{,}9999)$; $P(0{,}8)$; $P\left(-\frac{3}{4}\right)$.
4. Soit Q la fraction rationnelle définie par : $Q(x) = \dfrac{P(x)}{-1 + x - x^2}$.
   Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) \leq 0$

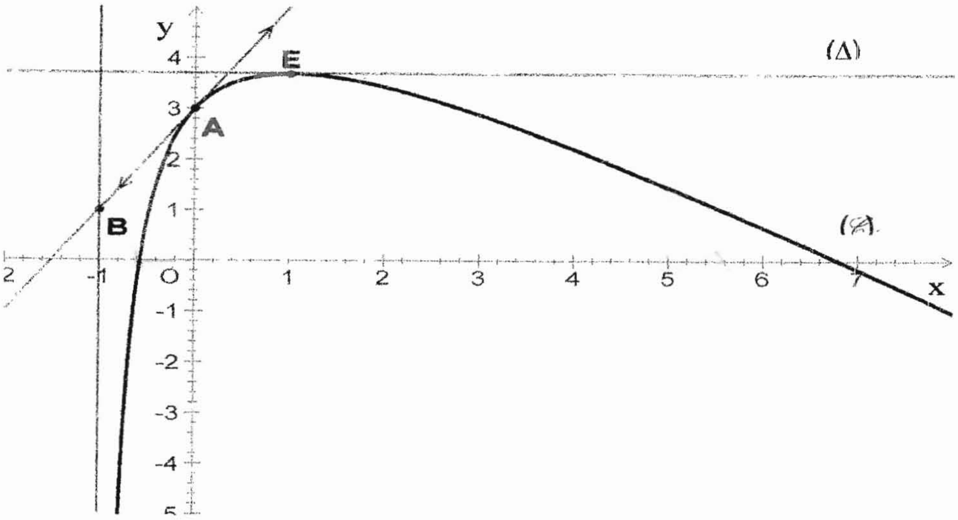
PROBLEME.   (11 points)

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal.

Sur la figure ci-dessous, la courbe $(\mathscr{C})$ représente une fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

On a placé les points A(0 ; 3) , B(-1 ; 1) et E(1 ; 3+ln2). La droite (AB) est tangente en A à la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (Δ) est tangente en E à la courbe $(\mathscr{C})$.



1. A Partir des informations ci-dessus, donner :
   a) Une équation de la droite (AB).
   b) Les valeurs des nombres $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
   c) Le nombre de solution de l'équation $f(x)=1$.
   d) Le tableau de variation de f.
2. On admet que la fonction f est définie par : $f(x)=ax+5+\dfrac{b}{x+1}+\ln(x+1)$, où a et b sont des nombres réels. Calculer les nombres a et b à partir de $f(0)$et $f(1)$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{-x^2+4x+3}{x+1}+\ln(x+1)$.

1. Déterminer la limite de f en -1. En donner une interprétation graphique.
2. a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$.
   c) Le résultat est-il cohérent avec le tableau donnée dans la partie A à la question 1.d) ?
3. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$. Donner une valeur approchée de cette solution à 10^{-1} près.
4. a) Vérifier que $f(x)=5-x-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x+1)$.
   b) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $]-1;+\infty[$ par : $g(x)=-x+(x+1)\ln(x+1)$. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
   c) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$. En donner une interprétation graphique.

PROPOSITION DE CORRECTION
MATHEMATIQUE SERIE B

Exercice 1. (5 points)

1. Coût de production de 300 bâtons de manioc :
$C(300)=0{,}1\times 300^2+38\times 300+4770 \Leftrightarrow$
$\boxed{C(300)=25170\ frs}$

Recette sur la vente des 300 bâtons de manioc :
$R=300\times 100 \Leftrightarrow \boxed{R=30000\ frs}$

2. a. Bénéfice de la ménagère :
$B=R-C=30000-25170 \Leftrightarrow \boxed{B=4830\ frs}$.

b. Expression du bénéfice en fonction de x :
$B(x)=R(x)-C(x)=100x-(0{,}1x^2+38x-4770)$
soit $B(x)=-0{,}1x^2+62x+4770$

c. Etude du signe de $B(x)$:
$\Delta=62^2-4(0{,}1)(4770)=1936=44^2$
$\begin{cases} x_1=530 \\ x_2=90 \end{cases}$

x	0		90		500		530
$B(x)$		-	0	+		+	0

*Le bénéfice est positif pour $x\in\,]90;500[$ c-à-d pour une production d'un nombre de manioc compris entre 90 et 500.

d. *Le bénéfice est maximum pour $B'(x)=0$:
$B'(x)=-0{,}2x+62 \Rightarrow -0{,}2x+62=0$
$\Leftrightarrow \boxed{x=310}$
Le bénéfice est donc maximum pour une production de 310 bâtons de manioc.

*Le bénéfice maximum est de :
$B(310)=-0{,}1\times 310^2+62\times 310+4770$ soit
$\boxed{B(310)=14380\ frs}$

Exercice 2. (4 points)

1. * $P(\sqrt{2})=4(\sqrt{2})^3-8(\sqrt{2})^2-15\sqrt{2}+9$, soit
$\boxed{P(\sqrt{2})=-7-7\sqrt{2}}$.

* $P(3)=4(3)^3-8(3)^2-15\times 3+9$, soit $\boxed{P(3)=0}$.

*On sait que $P(3)=0$ alors 3 est une racine de P.
Méthode de HÜNER :

	4	-8	-15	9
$3\times$		12	12	-9
	4	4	-3	0

D'où $P(x)=(x-3)(4x^2+4x-3)$.
$\Delta=4^2-4\times 4\times(-3)=16+48=64=8^2$

$\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$; donc $\boxed{P(x)=4(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$.

2. Signe de $P(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x-3$		-		-		-	0	+	
$x-\frac{1}{2}$		-		-	0	+		+	
$x-\frac{3}{2}$		-	0	+		+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

3. * $0{,}0001\in\,]3;+\infty[$, $alors P(3{,}0001)>0$;
* $2{,}9999\in\left]\frac{1}{2};3\right[$, $alors P(2{,}9999)<0$;
* $0{,}8\in\left]\frac{1}{2};3\right[$, $alors P(0{,}8)<0$;
* $-\frac{3}{4}\in\left]-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right[$, $alors P\left(-\frac{3}{4}\right)>0$.

4. **L'inéquation est définie si et seulement si** $-1+x-x^2\neq 0$. $\Delta=1^2-4(-1)(-1)=-3<0$ **donc** $(-1+x-x^2)$ **est du signe de -1, c-à-d négatif.**

Tableau de signe

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$-1+x-x^2$		-		-		-		-	
Q(x)		+	0	-	0	+	0	-	

PROBLEME. (11 points)

Partie A

1. a) $(AB): y=ax+b$. $\begin{cases} A(0;3)\Rightarrow a\times 0+b=3 \\ B(-1;1)\Rightarrow a(-1)+b=1 \end{cases}\Rightarrow$
$\begin{cases} -a+b=1 \\ b=3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$, donc $\boxed{(AB): y=2x+3}$.

b) * $\boxed{f(0)=3}$; * $\boxed{f'(0)=2}$; * $\boxed{f(1)=3+\ln 2}$;
* $\boxed{f'(1)=0}$.

c) La droite d'équation $y=1$ coupe (C) en deux points donc l'équation $f(x)=1$ admet deux (2) solutions.

2. $\begin{cases} f(0)=3 \Rightarrow a\times 0+5+\dfrac{b}{0+1}+\ln(0+1)=3 \\ f(1)=3+\ln 2 \Rightarrow a+5+\dfrac{b}{2}+\ln 2=3+\ln 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}=-2 \\ 5+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

Donc $\boxed{f(x)=-x+5-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x+1)}$.

Partie B

1. $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x)=-\infty}$ La droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à (C).

2. a) $f'(x)=-1+\dfrac{2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow \boxed{f'(x)=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}}$

b) $\Delta=(-1)^2-4(-1)\times 2=1+8=9=3^2$

$\begin{cases} x=\dfrac{1-3}{-2}=1 \\ x=\dfrac{1+3}{-2}=-2 \end{cases}$, d'où $\boxed{f'(x)=\dfrac{-(x-1)(x+2)}{(x+1)^2}}$.

Sur $]-1;+\infty[$, $(x+1)^2>0$, donc $f'(x)$ est du signe $\boxed{-(x-1)(x+2)}$

Signe de la dérivée

x	-2	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$ ‖	$+$	0	$-$	

Pour $x\in\ ]-1;1]$, $f'(x)\geq 0$ et pour $x\in\ ]1;+\infty[$, $f'(x)<0$.

c) Sur le graphique dans la partie A ;
Pour $x\in\ ]-1;1]$, f est croissante donc $f'(x)\geq 0$.
Pour $x\in\ ]1;+\infty[$, f est strictement décroissante donc $f'(x)<0$.

3. Sur $]-1;+\infty[$, f est strictement décroissante. Elle ré alise une bijection décroissante sur $]-\infty;3+\ln 2[$.
De plus , f change de signe, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique
$\alpha\in\ ]1;+\infty[\ \subset [0;+\infty[$
$\boxed{\alpha=6{,}8}$ à 10^{-1} près.

4. a) $5-\dfrac{2}{x+1}+\ln(x+1)=\dfrac{(5-x)(x+1)-2}{x+1}+\ln(x+1)$

$=\dfrac{-x^2+4x+3}{x+1}+\ln(x+1)=f(x)$.

b) * $g'(x)=-1+\ln(x+1)+\dfrac{x+1}{x+1} \Leftrightarrow \boxed{g'(x)=\ln(x+1)}$

* $\boxed{F(x)=5x-\frac{1}{2}x^2-2\ln(x+1)-x+(x+1)\ln(x+1)}$

c)

$\int_0^1 f(x)dx=\left[5x-\frac{1}{2}x^2-2\ln(x+1)-x+(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{2}+4\ln 2}$.

* $\int_0^1 f(x)dx$ représente l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $y=1$.