MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
INSPECTION DELEGUEE D 'ACADEMIE
DE L'OGOOUE MARITIME
CRW/DELTA/LJAA/LTB DE PORT GENTIL

REPUBLIQUE GABONAISE
UNION-TRAVAIL -JUSTICE

BAC BLANC COMMUNAL
AVRIL 2008

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
SERIE B
COEFFICIENT 3
DUREE 3 HEURES

EXERCICE 1 : (4 points)

Un sac contient 6 boules:deux portent le numero1, trois le numéro 2 et une le numéro 3.
1) Une épreuve consiste a tirer successivement 3 boules du sac, la boule tirée étant chaque fois aussitôt remise dans le sac. Combien y a-t-il de tirages dont :
a) A : les boules tirées portent dans l'ordre des tirages les numéros 1,2,3.
b) B : les boules tirées portent trois numéros différents
c) C : la somme des nombres portés par les boules tirées est 5.
2) On tire trois boules a la fois. Combien y a-t-il de tirages dont :
a) D : les boules portent des numéros différents
b) E : la somme des nombres portes par les boules tirées est égale a 5.

EXERCICE 2 :(5 points)

On considere la fonction polynôme P définie par : $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$

1) a)Calculer P (1 /2).
   b) En déduire une factorisation de P(x)
   c) Résoudre dans IR, P(x)=0
   d) Résoudre dans IR, P(x)>0

2) Résoudre dans IR

   a) $\ln\left[\frac{x}{x-1}\right]^2 = \ln 4 - \ln(5-2x)$

   b) $2\ln\left[\frac{x}{x-1}\right] = \ln 4 - \ln(5-2x)$

   c) $2\ln x - 2\ln(x-1) = \ln 4 - \ln(5-2x)$

   d) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 8\ln x + 4 > 0$

PROBLEME (11Points)

On considère la fonction **f** définie sur]0 ; + ∞ [par : **f(x) =** $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$.

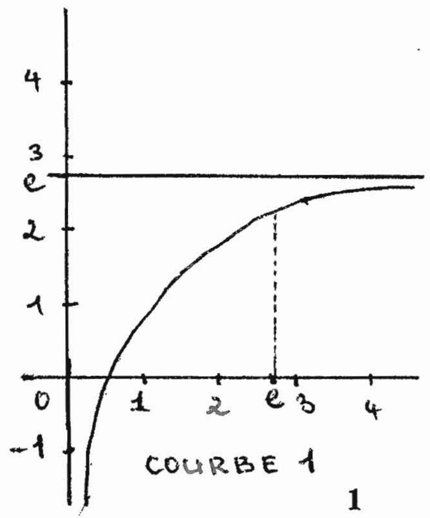
On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapproché à un repère orthogonal (**unités graphiques : 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonné**).

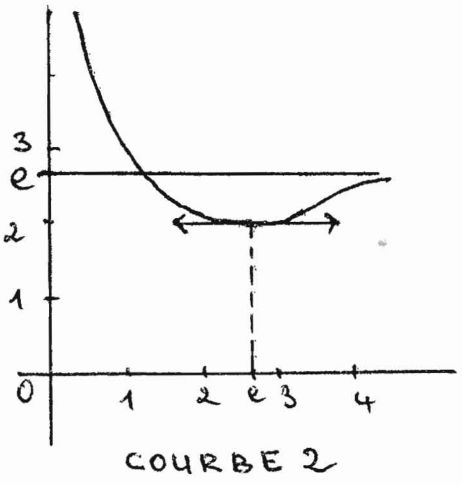
Partie A – Etude du signe d'une fonction auxiliaire.

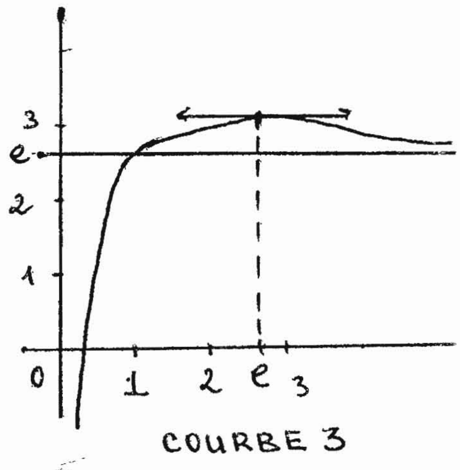
Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞ [par : **g(x) =** $\frac{\ln x}{x} + e$.

On note (C_g) la courbe représentative de g dans le plan rapproché à un repère orthonormal.

1) Déterminer les limites de **g** en **0** et **en +** ∞ . Donner l'interprétation graphique de chaque résultat.
2) a) Calculer **g' (x).**
   b) Etudier le signe de **g' (x) .**
   c) Dresser le tableau de variation de **g.**
3) L'une des trois courbes ci-dessous est la courbe (C_g). Indiquez le numéro correspondant à (C_g), en précisant les raisons de votre choix.







4) Calculer **g** $\left(\frac{1}{e}\right)$. **En déduire le signe de g(x).**

Partie B – Etude de la fonction f.

1) Déterminer les limites de **f en 0 et en +** ∞ .
2) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle] **0 ; +** ∞ [, on a : **f' (x) = g (x).**

   En déduire le signe de **f' (x).**
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) a) Déterminer une équation de la tangente **(T)** à (C_f) en son point A d'abscisse 1.
   b) Préciser la position de (C_f) par rapport à **(T).**
5) Tracer **(T)** et (C_f).

Corrigé Bac Blanc Communal 2008

Série B

1

EXERCICE 1 (4 points)

1 1 2 2 2 3

1)

a) il y a 2 possibilités de tirer la boule n°1

3 '' '' n°2

1 '' '' n°3

$\text{Card } A = 3 \times 2 \times 1 = 6$ $\boxed{\text{Card } A = 6}$

b) Choix des places : $3!$

$\text{Card } B = 3 \times 2 \times 1 \times 3! = 36$ $\boxed{\text{Card } B = 36}$

c) 1 1 3 ou 1 2 2

il y a 2^2 possibilités de tirer les 2 boules n°1

1 '' '' la boule n°3

Choix des places pour la boule n°3 : 3

ou bien

il y a 2 possibilités de tirer la ~~boule~~ n°1

" 3^2 possibilités de tirer deux boules n°2

Choix des places pour la boule n°1 : 3

$\text{Card } C = 3 \times 1 \times 2^2 + 3 \times 2 \times 3^2 = 66$ $\boxed{\text{Card } C = 66}$

2) a) $\text{Card } D = C_2^1 \times C_3^1 \times C_1^1 = 6$ $\boxed{\text{Card } D = 6}$

$\text{Card } E = C_2^2 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_3^2$

$= 1 + 6$

$= 7$ $\boxed{\text{Card } E = 7}$

EXERCICE 2 (5 points)

1) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

a) $P(1/2) = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 4$

$= \frac{2}{8} - \frac{1}{4} - \frac{8}{2} + 4$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 4 + 4$

$= 0$

$$\boxed{P\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0}$$

b) $P(x)$ est factorisable par $\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 8x + 4 & x - \frac{1}{2} \\ \cline{2-2} -2x^3 + x^2 & 2x^2 - 8 \\ \cline{1-1} 0 \quad -8x + 4 & \\ 8x - 4 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 - 8\right)$

$$\boxed{P(x) = 2\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x-2)(x+2)}$$

c) $P(x) = 0 \iff 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)(x+2) = 0$

$x - \frac{1}{2} = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

$S = \left\{-2 ; \frac{1}{2} ; 2\right\}$.

d)

x	$-\infty$		-2		$1/2$		2		$+\infty$
$2(x-1/2)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La solution de l'inéquation, $P(x)>0$ est :

$$S =]-2;\tfrac{1}{2}[\cup]2;+\infty[$$

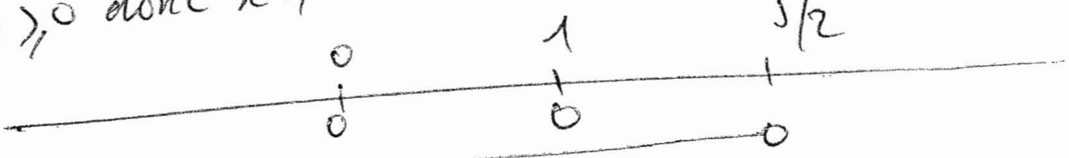
2) a) $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = \ln 4 - \ln(5-2x)$

Ensemble de Validité V

$\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 > 0$ et $x-1 \neq 0$ et $5-2x>0$

$x \neq 1$ et $x < 5/2$.

Or $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 \geqslant 0$ donc $x \neq 0$



$$V =]-\infty;0[\cup]0;1[\cup]1;5/2[$$

$\forall x \in V$, $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = \ln 4 - \ln(5-2x)$

$$\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = \ln\dfrac{4}{5-2x}$$

$\ln$ est bijective, $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 = \dfrac{4}{5-2x}$

$$x^2(5-2x) = 4(x-1)^2$$

$$5x^2-2x^3 = 4x^2-8x+4$$

$$2x^3-x^2-8x+4=0$$

d'après 1) c)

$x=-2 \in V$, $x=\frac{1}{2} \in V$, $x=2 \in V$

$$S = \{-2;\tfrac{1}{2};2\}.$$

~~d'après 1/ c) $x = -2 \notin V$, $x = \frac{1}{2} \notin V$ $x = 2 \in V$~~

~~$S = \{2\}$.~~

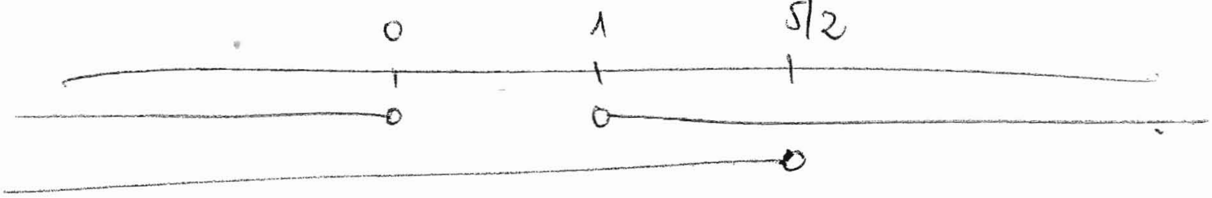
4

b) $2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln 4 - \ln(5-2x)$

$\frac{x}{x-1} > 0$ et $x - 1 \neq 0$ et $5 - 2x > 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ et $x < \frac{5}{2}$



$V =]-\infty; 0[\cup]1; \frac{5}{2}[$

$\forall x \in V$, $2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \ln 4 - \ln(5-2x)$

$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \ln 4 - \ln(5-2x)$

d'après 2) a). on a $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

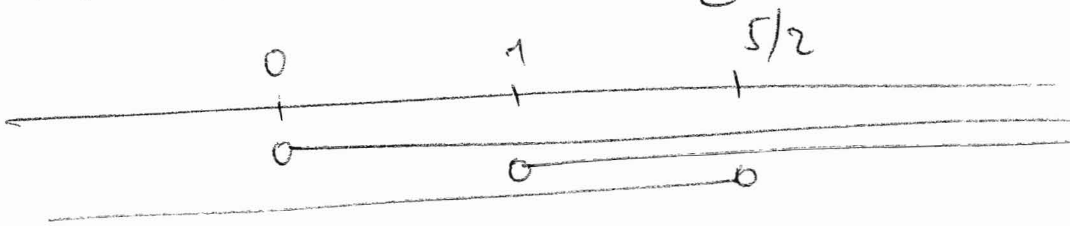
d'après 1) c) $x = -2 \in V$; $x = \frac{1}{2} \notin V$ $x = 2 \in V$

$S = \{-2; 2\}$.

c) $2\ln x - 2\ln(x-1) = \ln 4 - \ln(5-2x)$

$x > 0$ et $x - 1 > 0$ et $5 - 2x > 0$

$x > 0$ et $x > 1$ et $x < \frac{5}{2}$



$V =]1; \frac{5}{2}[$

$x \in V,\ x \ln x - 2\ln(x-1) = \ln 4 - \ln(5-2x)$ (5)

$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \ln\left(\frac{4}{5-2x}\right)$$

d'après ce qui précède, $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

$x = -2 \notin V$, $x = \frac{1}{2} \notin V$ $\quad x = 2 \in V$

$S = \{2\}$.

d) $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 8\ln x + 4 > 0$

$x > 0$, $\quad V =]0;+\infty[$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $2(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 8\ln x + 4 > 0$

On pose $X = \ln x$ on obtient $2X^3 - X^2 - 8X + 4 > 0$

d'après 1) d) $-2 < X < \frac{1}{2}$ ou $X > 2$

$-2 < \ln x < \frac{1}{2}$ ou $\ln x > 2$

$e^{-2} < x < e^{1/2}$ ou $x > e^2$

$S =]e^{-2}; e^{1/2}[\cup]e^2; +\infty[$

<u>Problème (11 points)</u>

<u>Partie A</u> $\quad g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} e = e\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} (e) = e\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = e}$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$,
La droite d'équation $y = e$ est asymptote horizontale à $+\infty$

2) a) g est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}}$$

6

b)

$1 - \ln x > 0$ $\qquad$ $1 - \ln x < 0$

$\ln x < 1$ $\qquad$ $\ln x > 1$

$x < e$ $\qquad$ $x > e$

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	

c)

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}+e$	$\searrow$	e

$$g(e) = \frac{\ln e}{e} + e$$
$$= \frac{1}{e} + e$$

3) La courbe 1 represente une fonction strictement croissante
La courbe 2 n'a pas les mêmes variations que celles de g
La courbe 3 représente $(\mathcal{C}_g)$ car elle présente les mêmes variations que $(\mathcal{C}_g)$ et les mêmes asymptotes.

4) $$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} + e = \frac{-\ln e}{\frac{1}{e}} + e$$
$$= -e + e$$
$$= 0$$

$$\boxed{g\left(\frac{1}{e}\right) = 0}$$

Pour tout $x \in]0\,;\frac{1}{e}[$, g est croissante et $g(\frac{1}{e}) = 0$

donc $g(x) < 0$

7

Pour tout $x \in]\frac{1}{e}\,;+\infty[$ g admet un maximum en e qui est $e + \frac{1}{2} > 0$

donc $g(x) > 0$

x	0		$1/e$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$$

1)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} X^2 = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to 0} (\ln(x))^2 = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d'où } \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} (ex - e) = -e\end{array}\right\} \boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} X^2 = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{d'où } \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (ex - e) = +\infty\end{array}\right\} \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x + e$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{\ln x}{x} + e} \text{ donc } \boxed{f'(x) = g(x)}$$

Le signe de f' dépend de celui de g

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	

8

3)

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|$	$+\infty$ ↘	$\frac{3}{2}-e$	↗ $+\infty$	

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 + e\times\frac{1}{e} - e$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - e$$

$$= \frac{3}{2} - e$$

4) a) $f(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + e - e = 0$

$f'(1) = \frac{\ln 1}{1} + e = e$

$(T) : y = e(x-1) + 0$

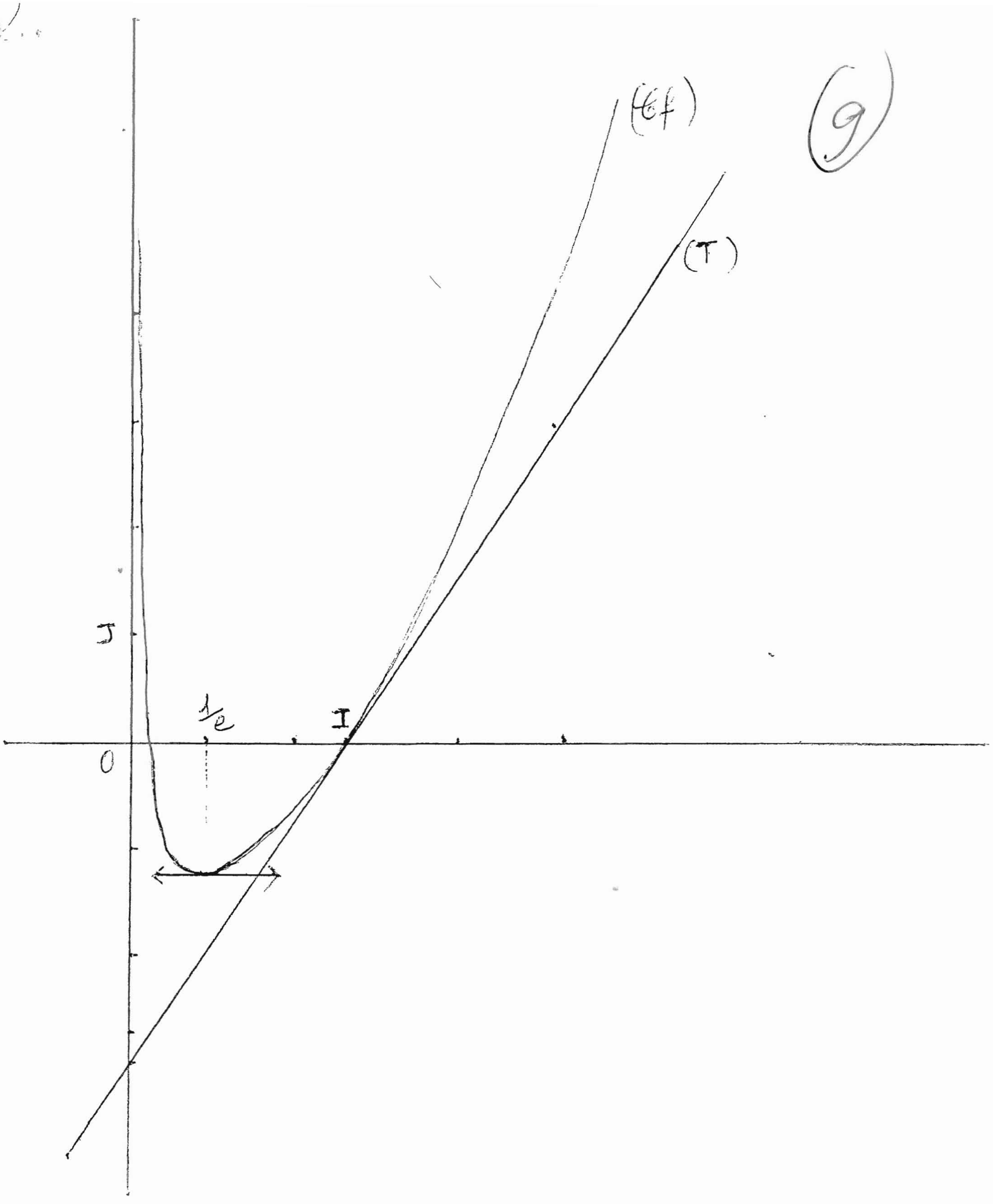
$$\boxed{(T) : y = e(x-1)}$$

b) $f(x) - e(x-1) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e - ex + e$

$= \frac{1}{2}(\ln x)^2$

or pour tout $x \in]0;+\infty[$ $\frac{1}{2}(\ln x)^2 > 0$

donc $(\mathscr{C}f)$ est au dessus de (T).



$(\mathcal{C}_f)$
(T)
J
$1/e$
I
0