|  |  |
| --- | --- |
| **Travaux dirigés en arithmétique pour la TCetE** |  |
| Exercice 1Soit n un entier naturel1°Montrer que $n^{3}$ - n = (n + 2)($n^{2}$ - 2n+ 3) – 62°En déduire les valeurs de n pour lesquels $\frac{n^{3}-n}{n+2}$ est un entier.Exercice 2Ecrire dans le système decimal :a)Le nombre qui s’écrit $\overbar{3420}$ en base 7.b)Le nombre qui s’écrit $\overbar{aaa}$ en base 12 où a=10.c)Le nombre qui s’écrit $\overbar{110011001}$ en base 2.Exercice 31°a)Développer $( a+1 )^{4}$ .b)En déduire l’écriture en base 7 de $8^{4}$ .2°a)Développer $( a+1)^{5}$ .b)En déduire l’écriture en base 7 de $8^{5}$ .Exercice 4.1° Le nombre $2^{11}$ - 1 est-il premier ?2°Soit p et q deux entiers naturels non nuls.a)Montrer que $2^{P}$ $≡$ 1 [ $2^{P}$ - 1 ].En déduire que $2^{pq}$ $≡$ 1 [ $2^{p}$ - 1 ].b)Montrer que $2^{pq}$ - 1 est divisible par $2^{p}$ - 1 etpar $2^{q}$ - 1 .3°Démontrer que , si $2^{n}- 1$ est premier ,alorsN est premier.( raisonner par l’absurde).Exercice 51°Déterminer le reste de la division euclidiennePar 7 de $3^{n}$ avec n $\in N$ .2°En déduire le rsete de la division euclidiennePar 7 de $1998^{128}$ .Exercice 6.1°Montrer que si deux si x et y sont premiers entre eux alors 2x+y et 5x+2y le sont aussi.2°Déterminer les couples d’entiers naturels nonNuls ( a ; b ) tel que$ \begin{matrix}\left( 2a+b \right)\left(5a+2b\right)=1620\\ab=3 ppcm\left( a;b\right).\end{matrix}$Exercice7a)En utilisant l’algorithme d’euclide, montrer que 1981 et 1815 sont premiers entre eux.b)Déterminer deux entiers relatifs a et b tels que1981a + 1815b = 1.c) Résoudre dans $Z^{2}$ l’équation :1981 x + 1815 y = 2.Exercice 8Trouver tous les couples d’entiers naturels non Nuls a et b tels que  ab = 1734 et pgcd ( a ; b ) = 17.Exercice 91°Résoudre dans $Z^{2}$ 4 x – 5 y = 3.2°Trouver le nombre N s’écrivant $\overbar{xy}$ en base 6 ,X et y vérifiant 4 x – 5 y = 3.3°Trouver le nombre N’ s’écrivant $\overbar{x y}$ en base 10X et y vérifiant 4 x – 5 y = 3 .  | Exercice 10.1°Résoudre dans $Z^{2}$ ( E ) 13 x - 84 y = 7.2°Montrer que ,si ( x , y ) est une solution de ( E )a)Alors 7 divise x .b)Alors pgcd ( x , y ) est 1 ou 7 .3°Déterminer les solutions de ( E ) telles que lePgcd ( x , y ) soit maximal.En déduire les solutions de ( E ) telles que x et y Soient premiers entre eux.Exercice 11.1°Déterminer pgcd( 2688,3024 ).2°a) Résoudre dans $Z^{2}$ ( E ) 8x + 9y = - 10.b)Déduire de ( E ) les solutions de l’équation( E’ ) 2688x + 3024y= - 3360.3°a) Montrer que les plans ( P ) et ( Q ) d’équations x + 2y-z = -2 et 3 x – y +5z = 0 se coupent suivant une droite ( D ) dont on donnera une représentation paramétrique .b)Montrer que les coordonnées de ( d ) vérifient( E’ ) .En déduire les points de ( D ) dont les coorDonnées sont des entiers relatifs.Exercice 12( O , $\vec{U}$,$\vec{V}$ ) est un ROND du plan complexe et f une application du plan dans lui-même qui à tout point M ( z ) associe M’ ( z’ ) telle queZ’ = z $e^{\frac{5iπ}{6}}$ et on définit une suite de points ($ M\_{n}$)De la façon suivante :$\*M\_{0}$ a pour affixe $z\_{O}$ = $e^{\frac{iπ}{2}} $;$\*$Pour tout entier n, $M\_{n+1}$ f ( $M\_{n}$ ).On appelle $Z\_{n}$ l’affixe de $M\_{n}$ .1°Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. Placer $M\_{0}$ ,$M\_{1}$ et $M\_{2}$. 2°Démontrer par récurrence que : pour tout n on a $Z\_{n}$ = $e^{i(\frac{π}{2}+\frac{5n}{6})}$ .3°Soit deux entiers n et p tels que n $\geq $ p. Démontrerque $M\_{n}$ = $M\_{p}$ $<=>$ ( n – p ) multiple de 12 .4°a) Résoudre dans $Z^{2}$ ( E ) 12x – 5y = 3.b)En déduire l’ensemble des entiers naturels n telsque $M\_{n}$ appartienne à la demi-droite [O x ).Exercice 13On pose a=11n +3 et b = 13n – 1 avec n $\in $ $N^{\*}$.1°Montrer que pgcd ( a , b )= pgcd ( a , 50 ).2°a)Résoudre dans $N^{\*}^{2}$ 50x – 11y = 3.b)En déduire les n tels que pgcd ( a, b ) = 50.c)En déduire les n tels que pgcd ( a , b ) = 25.Exercice 14. Résoudre dans $N^{\*}^{2}$ le système :$a^{2}$ - $b^{2}$ = 405 et 3 ppcm ( a , b ) = ab.Exercice 15.1° Résoudre dans $Z^{2} $ 11 p + 2 q = 902°Jean est encore un enfant, mais en l’an 2000,son âge était égal à la somme des chiffres de son année de naissance. En quelle année est-il né ? |